

3. Prüfung am 12. Juni 2025.

(Erforderlich sind 24 Punkte, und mindestens eine gute Lösung aus der Theorie.)

Theorie (5 × 4P)

1. Definition des Kernraumes und Bildraumes einer quadratischen Matrix.
2. Was wissen wir über die Eigenwerte und Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix?
3. Wann nennt man eine numerische Reihe absolut konvergent, bzw. bedingt konvergent?
4. Die Polarkoordinatentransformation. (Auch die Integraltransformation.)
5. Was bedeutet die Verfeinerung der Aufteilung eines $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^2$ Bereiches über alle Grenzen?

Aufgaben (5 × 8P)

1. Für welchen Wert des reellen Parameters c ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar, nicht lösbar, und wann hat es eine parametrische Lösung? Bestimmen Sie z mit der Cramerschen Regel für $c = 0$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & c \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

2. Sei \mathcal{A} die Spiegelung an die xy -Ebene, \mathcal{B} die Spiegelung an die xz -Ebene. Schreiben Sie die Matrixform der Abbildungen in der natürlichen Basis. Dann bestimmen Sie die Matrixform der Komposition, wenn wir zuerst an die xy -Ebene spiegeln, dann an die xz -Ebene. Was sind die invarianten Unterräume der Komposition?
3. Bestimmen Sie die Grenzfunktion, Konvergenzradius und Konvergenzbereich der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$. Dann berechnen Sie den Betrag der numerischen Reihe $-\frac{1}{4} + \frac{2}{16} - \frac{3}{64} + \dots + (-1)^n \frac{n}{4^n} + \dots$
4. Sei $z = \frac{x+2}{y^2+1}$. Was ist die Gleichung der Niveaulinien und was für Kurven sind sie geometrisch? Was ist die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $P(-1; 2)$?
5. Skizzieren Sie den Integrierungsbereich auf, und berechnen Sie das

$$\text{Integral: } \int_{y=0}^1 \int_{x=y}^1 y^2 \cdot e^{-x^4} dx dy$$

3. Prüfung am 12. Juni 2025.

(Erforderlich sind 24 Punkte, und mindestens eine gute Lösung aus der Theorie.)

Theorie (5 × 4P)

1. Definition des Kernraumes und Bildraumes einer quadratischen Matrix.
2. Was wissen wir über die Eigenwerte und Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix?
3. Wann nennt man eine numerische Reihe absolut konvergent, bzw. bedingt konvergent?
4. Die Polarkoordinatentransformation. (Auch die Integraltransformation.)
5. Was bedeutet die Verfeinerung der Aufteilung eines $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^2$ Bereiches über alle Grenzen?

Aufgaben (5 × 8P)

1. Für welchen Wert des reellen Parameters c ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar, nicht lösbar, und wann hat es eine parametrische Lösung? Bestimmen Sie z mit der Cramerschen Regel für $c = 0$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & c \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

2. Sei \mathcal{A} die Spiegelung an die xy -Ebene, \mathcal{B} die Spiegelung an die xz -Ebene. Schreiben Sie die Matrixform der Abbildungen in der natürlichen Basis. Dann bestimmen Sie die Matrixform der Komposition, wenn wir zuerst an die xy -Ebene spiegeln, dann an die xz -Ebene. Was sind die invarianten Unterräume der Komposition?
3. Bestimmen Sie die Grenzfunktion, Konvergenzradius und Konvergenzbereich der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n$. Dann berechnen Sie den Betrag der numerischen Reihe $-\frac{1}{4} + \frac{2}{16} - \frac{3}{64} + \dots + (-1)^n \frac{n}{4^n} + \dots$
4. Sei $z = \frac{x+2}{y^2+1}$. Was ist die Gleichung der Niveaulinien und was für Kurven sind sie geometrisch? Was ist die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $P(-1; 2)$?
5. Skizzieren Sie den Integrierungsbereich auf, und berechnen Sie das

$$\text{Integral: } \int_{y=0}^1 \int_{x=y}^1 y^2 \cdot e^{-x^4} dx dy$$