

Mathematik G3 Hausaufgabe Differentialgleichungen

Textaufgaben

- 1) Man hält einen Kieselstein in der Hand über dem Brunnen, und lässt man ihn los. Man misst die Zeit solange, bis er ins Wasser fällt (patscht). Man hört das Platschen nach 5 Sekunden. wie tief liegt die Wasseroberfläche?
- 2) Ein PKW verlangsamt sich gleichmäßig von der Anfangsgeschwindigkeit 72 km/h, und hält nach 10 Sekunden. wie lang ist der Bremsweg?
- 3) Ein bestimmtes Gestein enthält 100 mg Uran und 14 mg Blei. Man weiss, dass die Halbwertzeit (HWZ) des Urans $4,5 \cdot 10^9$ Jahre ist, und dass während des vollkommenen Zerfalls von 238 g Uran sich 206 g Blei erzeugt. Bestimmen Sie das Alter des Gesteines, falls man annehmen kann, dass das Gestein am Anfang kein Blei enthält.
- 4) In einen Behälter, der 10 l Wasser enthält, fließt eine Salzlösung mit einer gleichmäßigen Geschwindigkeit 2 l/min ein, deren Konzentration 0,3 kg/l ist. Die Lösung vermischt sich vollkommen mit dem Wasser sofort, und dann fließt aus dem Behälter mit der gleichen Geschwindigkeit aus. Wieviel Salz enthält das Wasser nach 5 Minuten?
- 5) Betrachten Sie das folgende Räuber-Beute-Modell! Beantworten Sie die Fragen, und rechtfertigen Sie Ihre Behauptungen!

$$\begin{cases} \dot{X} = (2 - Y)X \\ \dot{Y} = (-1,5 + 0,5X)Y \end{cases}$$

- a) Welche Gleichung drückt die zeitliche Änderung der Anzahl der Beutepopulation aus? Und welche die zeitliche Änderung der Räuberpopulation?
- b) Skizzieren Sie den Phasenraum, stellen sie das Richtungsfeld und einige Isoklinen im Phasenraum dar!
- c) Bestimmen Sie die Gleichgewichtspunkte!
- d) Was passiert mit der Beutepopulation in der Abwesenheit der Räuber?
- e) Was passiert mit der Räuberpopulation in der Abwesenheit der Beuten?

(Gemischte Aufgaben: siehe nächste Seite!)

Gemischte Aufgaben

In den folgenden Aufgaben bestimmen sie immer den Typus der Differentialgleichung (DGL), bzw. des Anfangswertproblems (AWP-s), und dann lösen Sie die DGL (das AWP)!

- 1) Bei dieser Aufgabe bestimmen sie auch den Grundbereich $D \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$, wo die Lösung existiert! ($N = ?$)

$$y' = \frac{x-1}{y} \quad \text{és} \quad y(3) = 1$$

- 2) Bei dieser Aufgabe bestimmen Sie die nicht konstanten Lösungen, und geben Sie einen solchen $D \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$ Bereich an, wo die lösung existiert. ($N = ?$)!

$$y' = y \cdot \operatorname{tg}(x)$$

3) $\sqrt{1-x^2} \cdot y' + xy = 0$

4) $xy' + y = y^2$ és $y(2) = -3$

5) $\sqrt{x}y'' + y' = 0$ **Idee: zuerst** $u(x) = y'(x) = ?$

6) $y' = \frac{y^2 - x^2}{xy}$

7) $xy' = y(1 - \ln(y) + \ln(x))$

8) $8y + 10x + (5y + 7x)y' = 0$

9) $3xy^2y' = x^3 + 3y^3$ und $y(2) = 1$

10) $x^3 + y^3 - 3xy^2y' = 0$

11) $y^2 dx + x(\sqrt{y^2 - x^2} - y) dy = 0$ und $y(1) = -1$

12) * $y' = x - y + 1$ und $P_0 = (0;3)$ **mit Substitution:** $u(x) = x - y(x) + 1$

13) * $y' = (x + y - 4)^2$ und $y(\pi) = 4 - \pi$ **mit Substitution:** $u(x) = x + y(x) - 4$

14) * $y' = \sqrt{2x + 3y - 1} + 4x + 6y + 3$ **mit Substitution:** $u(x) = 2x + 3y(x) - 1$

15) $xy' - (x+1)y = x^2 - x^3$

16) $-(1 + e^{2x})y' + e^{2x}y = 0$

17) $y' - \frac{y}{x} - 2x^2 = 0$ und $y(1) = -1$

18) $xy' + y - \sqrt{x} = 0$ und $y(1) = 1$

19) $y' - \frac{y}{x} - 2x^2 = 0$ und $y(0) = 1$

20) $y' - \frac{y}{x} - 2x^2 = 0$ und $y(1) = 0$

21) $y' = \operatorname{ctg}(x)y + 5 \cdot e^{\cos(x)}$

$$22) y' = \frac{4y}{x} + x^4 \sin(x)$$

$$23) y' = \frac{-y}{2x} + \frac{1}{2y}$$

$$24) y' = 2y + x \cdot y^3$$

$$25) y''(1 + \sin(x))^2 + \cos(x) = 0$$

$$26) 2xe^{x^2} + y \cdot sh(x) + (ch(x) - 2ch(2y)) \cdot y' = 0$$

$$27) 2x(1+y) + (x^2+1) \cdot y' = 0 \text{ und } y(0) = 2$$

$$28) 2x + \cos(y) - (x \cdot \sin(y)) \cdot y' = 0 \text{ und } y(1) = 0$$

$$29) y'' + 4y' + 4y = 0$$

$$30) y''' + 2y'' - 4y' - 8y = 0 \text{ és } y(0) = 0, y'(0) = 3, y''(0) = 4$$

$$31) y''' - y'' + 4y' - 4y = 0 \text{ és } y(0) = 0, y'(0) = 3, y''(0) = 5$$

$$32) y'' - y = e^x(2x+3) \text{ és } y(0) = 1, y'(0) = 4$$

$$33) y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$$

$$34) y'' + 3y' + 2y = e^{-x} \text{ und } y(0) = 0, y'(0) = 0$$

$$35) 2y'' + 8y' + 8y = x$$

$$36) y'' - 5y' + 6y = 3e^t$$

$$37) y'' - 5y' + 6y = 3x^2 + 1 \text{ und } y(0) = 0, y'(0) = 0$$

$$38) y^{(4)} + y = 0$$