Mathematik A3 Hausaufgabe: VEKTORANALYSIS

(2016. Oktober)

Raumkurven und Flächen (siehe auch Mathematik A2)

1) Prüfen Sie ob die folgende Vektor-Skalar-Funktion stetig ist, oder sich stetig ergänzen lässt! Existiert der Grenzwert im Punkt $t_0 = 0$?

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{t \cdot ctg(3t)}{4} \\ \frac{tg(t) - \sin(t)}{\sin^2(t)} \\ \frac{tg(t)}{t} \end{pmatrix}$$

2) Prüfen Sie ob die folgende Vektor-Skalar-Funktion stetig ist, oder sich stetig ergänzen lässt! Existiert der Grenzwert im Punkt $t_0 = 1$?

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^3 - 3t + 2}{t^4 - 4t + 3} \\ \frac{t^4 - 3t + 2}{t^5 - 4t + 3} \\ \frac{\sqrt{t} - 1}{t - 1} \end{pmatrix}$$

3) Zeigen Sie, dass die folgenden Kurven auf (je) einer Fläche mit der Gleichung $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$ laufen! Was für Flächen sind sie?

   a) $\underline{r}(t) = \frac{1}{2}\sin(2t)\underline{i} + \sin^2(t)\underline{j} + \cos(t)\underline{k}$

   b) $\underline{r}(t) = a \cdot \frac{1 - \cos(2t)}{2}\underline{i} + b \cdot \sin(t)\cos(t)\underline{j} + c \cdot \cos(t)\underline{k}$, wo $a, b, c, \in \mathbb{R}$ sind festgelegte Konstante.

4) Schreiben Sie die Gleichung der Tangenten der angegebenen Kurve an der festgelegten Stelle (t_0) auf!

   a) $\underline{r}(t) = 3^t\underline{i} + t \cdot \ln(3)\underline{j} + \sqrt{t^2 + 1}\underline{k}$ und $t_0 = \frac{1}{2}$

   b) $\underline{r}(t) = \frac{1}{\cos(t)}\underline{i} + tg(t)\underline{j} + (a \cdot t)\underline{k}$, wo $a \in \mathbb{R}$ und $t_0 = \frac{\pi}{3}$

5) Parametrisieren Sie die folgende Kurve nach der Bogenlänge (Weglänge)! Was für eine Kurve is es? Auf was für einer Fläche läuft die Kurve? Schreiben Sie eine parametrische Vektorgleichung der Fläche auf!

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ \cos(t^2) \\ \sin(t^2) \end{pmatrix}$$

6) Die folgende Vektor-Skalar-Funktion beschreibt die Bewegungsbahn eines Massenpunktes als Funktion der Zeit (t). Bestimmen Sie
   - die Anfengsgeschwindigkeit,
   - die Geschwindigkeit des Massenpunktes eine Stunde nach dem Beginn ($t_0 = 0$) der Beobachtung der Bewegung (die Zeit messen wir in Sekunden),
   - Länge des Weges, den der Massenpunkt während 11 Sekunden belaufen hat (die Aufschreibung des Integrals ist genügend),
   - die Beschleunigung nach 11 Sekunden!

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^3+1}{2} \\ t-1 \\ 5t^4 - 3t^2 + 2 \end{pmatrix}$$

7) Die Weg-Zeit-Funktion der Flugbahn einer Kanonenkugel ist $\underline{r}(t) = (a \cdot t + b)\underline{i} + (g \cdot t^2 + c \cdot t + d)\underline{k}$, wo der Abschuß am Zeitpunkt t=0 sec geschieht, und $a = 5\frac{m}{s}$, $b = 100m$, $c = 10\frac{m}{s}$, $d = 200m$, $g = -5\frac{m}{s^2}$.
   a) Wo ist die Kanonenkugel abgeschossen worden?
   b) Wie groß war die Anfangsgeschwindigkeit? (Größe!)
   c) Bestimmen Sie die Beschleunigung!
   d) Wie lange dauert es, bis die Kugel landet? (Die Erdoberfläche erreicht.)
   e) Wo und an welchem Zeitpunkt sind die Geschwindigkeit und die Beschleunigung orthogonal zueinander?

8) Bestimmen Sie die Masse des Drahtes, der mit dem parametrischen Gleichungssystem $\underline{r}(t) = (t^2 - 1) \cdot \underline{i} + 2t \cdot \underline{k}$, $t \in [1;2]$ beschrieben ist, falls man weiss, das die Massendichtefuntion $\rho(t)$ ist! Die Dicke des Drahtes kann man vernachlässigen.
   a) $\rho(t) = a$ wo a eine positive, reelle Konstante ist
   b) $\rho(t) = \frac{4}{3}t$

   Beim Punkt b) bestimmen Sie den Schwerpunkt des Drahtes! ($t = ?$, $\underline{r}(t) = ?$)

9) Prüfen Sie, dass die folgenden drei Punkte nicht kollinear sind, dann schreiben Sie das nichtparametrisches Gleichungssystem und auch ein parametrisches Gleichungssystem der aufgespannten Ebene auf!
   $P_1(0;0;0)$, $P_2(1;0;0)$, $P_3(0;1;0)$

10) Rotieren Sie den Graph der Funktion $(z =) f(x) = \ln(x)$
   a) um die z-Achse,
   b) um die x-Achse!

   Schreiben Sie je ein parametrisches Gleichungssystem der Flächen auf, die der Graph durch die Rotationen erzeugt.

11) Schreiben Sie die nichtparametrische (vektorfreie) Gleichung der nachfolgenden Flächen! Was für Flächen sind sie?
   a) $\underline{r}(u,v) = a \cdot \cos(u)\underline{i} + a \cdot \sin(u)\underline{j} + v \cdot \underline{k}$, wo a∈ℝ festgelegt, $u \in [0;2\pi]$, $v \in \mathbb{R}$.
   b) $\underline{r}(u,v) = a \cdot \cos(u) \cdot \sin(v) \cdot \underline{i} + b \cdot \sin(u) \cdot \sin(v) \cdot \underline{j} + c \cdot \cos(v) \cdot \underline{k}$, wo a, b, c sind festgelegte, reelle Parameter, $u, v \in [0;2\pi]$.

12) Schreiben Sie die parametrische Vektorgleichung der folgenden Fläche auf! Was für eine Fläche is es?

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$, wo a, b, c sind festgelegte, reelle, positive Parameter.

13) Schreiben Sie die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $(u_0,v_0)=(\frac{\pi}{4},\pi)$ auf! Was für eine Fläche is es?

$\underline{r}(u,v)=(2+\cos(v))\cdot\cos(u)\cdot\underline{i}+(2+\cos(v))\cdot\sin(u)\cdot\underline{j}+\sin(v)\cdot\underline{k}$

14) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Flächenstückes auf dem $\mathcal{T}$ Bereich!

a) $\underline{r}(u,v)=(\cos(u)-v\cdot\sin(u))\cdot\underline{i}+(\sin(u)-v\cdot\cos(u))\cdot\underline{j}+(u+v)\cdot\underline{k}$ wo $\mathcal{T}$: $0\le u\le\pi$ und $0\le v\le 1$,

b) $2z=x^2$ wo $\mathcal{T}$ ist der mit den Kurven x=2y, 2x=y und x=$2\cdot\sqrt{2}$ begrenzter, beschränkter Bereich.

div, **rot**, **grad**, ∇, Δ

1) Beweisen Sie die Identitäten!

a) $div(u\cdot\underline{v})=\langle\underline{v},\underline{grad}(u)\rangle+u\cdot div(\underline{v})$

b) $\underline{rot}(u\cdot\underline{v})=(\underline{grad}(u)\times\underline{v})+u\cdot\underline{rot}(\underline{v})$

c) $div(\underline{v}\times\underline{w})=\langle\underline{w},\underline{rot}(\underline{v})\rangle-\langle\underline{v},\underline{rot}(\underline{w})\rangle$

2) Bestimmen Sie den Bereich, wo das Vektorfeld $\underline{v}(\underline{r})$ quellenfrei, bzw. wirbelfrei is! Wo ist es harmonisch?

a) $\underline{v}(\underline{r})=(x^2-y^2)\cdot\underline{i}+(y^2-z^2)\cdot\underline{j}+(z^2-x^2)\cdot\underline{k}$

b) $\underline{v}(\underline{r})=(x^2+y^3)\cdot\underline{i}+(12xy-3x)\cdot\underline{j}+(xyz^2)\cdot\underline{k}$

c) $\underline{v}(\underline{r})=\underline{a}(\underline{r}^2)$

Kurvenintegral

1) Ermitteln Sie das Kurvenintegral des Vektorfeldes $\underline{v}(\underline{r})$ längs $\mathcal{G}$!

a) $\underline{v}(\underline{r})=(y^2-x^2)\cdot\underline{i}+2yz\cdot\underline{j}+(-x^2)\cdot\underline{k}$ und das Gleichungssystem von $\mathcal{G}$ ist $x=t, y=t^2, z=t^3$, $(0\le t\le 1)$, mit der Richtung, die dem Anwachs des Parameters entspricht.

b) $\underline{v}(\underline{r})=(2xy-z)\cdot\underline{i}+(x^2+z)\cdot\underline{j}+(y-x)\cdot\underline{k}$ und die Gleichung der Ellipse $\mathcal{G}$ ist $\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{16}y^2=1,\ z=2$ mit negativer Drehrichtung.

2) Die Feldstärke sei: $E=(3x+2xz)\cdot\underline{i}+(2y^2+5xz)\cdot\underline{j}+(5xy)\cdot\underline{k}$.

a) Welche Arbeit leistet das Vektorfeld, falls ein Körper der Masse 1kg sich vom Punkt P_0(1;2;-1) bis P_1(-1;2;0) entlang einer Strecke bewegt?

b) Ist das Vektorfeld ein Gradientenfeld? Falls ja, berechnen Sie das Potential!

3) Berechnen Sie das Potential des Kraftfeldes $(x+z^2, xy, \frac{y^2}{2}+2xz)$! Wie gross ist die verrichtete Arbeit, wenn man vom Punkt $(1;0;0)$ nach $(2;1;3)$ geht?

4) Gegeben sei das Kraftfeld $(x; y; \sqrt{x^2 + y^2})$! Man berechne die Arbeit, wenn man sich entlang der spiralförmigen Kurve $(t \cdot \cos(t)\,; t \cdot \sin(t)\,; t)$ für $t \in [0; R]$ bewegt!

5) Sei das folgende Kraftfeld gegeben: $E = -2(xy+z)\cdot \underline{i} - x^2 \cdot \underline{j} - (2x+5)\cdot \underline{k}$. Welche Arbeit leistet das Vektorfeld bis ein Körper der Masse m=5kg sich längs der Kurve $\underline{r}(t) = (t+2)\underline{i} - 3t\,\underline{j} + (t^2+1)\underline{k}$ vom Punkt $P_0(2;0;1)$ nach $P_1(1;3;2)$ bewegt?

Oberflächenintegral

1) Berechnen Sie das Oberflächenintegral des Vektorfeldes $\underline{v}(\underline{r})$ über dem Flächenstück $\mathcal{F}$ mit der Richtung $\dot{\underline{r}}_u \times \dot{\underline{r}}_v$!

a) $\underline{v}(\underline{r}) = x\cdot \underline{i} + y\cdot \underline{j} + z\cdot \underline{k}$ und $\mathcal{F}$: $\underline{r}(u,v) = 3\cdot\cos(v)\cdot \underline{i} + 3\cdot\cos(u)\cdot\sin(v)\cdot \underline{j} + \sin(u)\cdot \underline{k}, \quad 0 \le u \le \pi, \quad 0 \le v \le 2\pi.$

b) $\underline{v}(\underline{r}) = xy\cdot \underline{i} + (2x+z)\cdot \underline{k}$ und $\mathcal{F}$: $\underline{r}(u,v) = (u+2v)\cdot \underline{i} - v\cdot \underline{j} + (u^2+3v)\cdot \underline{k}, \quad 0 \le u \le 3, \quad -2 \le v \le 0.$

Integralsätze

Falls es möglich ist, benutzen Sie einen Integralsatz (Stokes, Green oder Gauss-Osztrogradszkij) für Ermittlung des Integrals des Vektorfeldes $\underline{v}(\underline{r})$ längs der gegebenen Kurve bzw. über dem gegebenen Flächenstück.

1) $\underline{v}(\underline{r}) = (2xy - z)\cdot \underline{i} + (x^2+z)\cdot \underline{j} + (y-x)\cdot \underline{k}$, die Kurve ist die Schnittlinie des elliptischen Zylinders $16x^2 + 9y^2 = 144$ und der Ebene z=2 mit positiver Umlaufrichtung.

2) $\underline{v}(\underline{r}) = -x^2 y\cdot \underline{i} + xy^2\cdot \underline{j}$, längs der Kurve $x^2 + y^2 = a^2$ mit positiver Drehrichtung.

3) $\underline{v}(\underline{r}) = \sqrt{x^2+y^2}\cdot \underline{i} + y(xy + \ln(x + \sqrt{x^2+y^2}))\cdot \underline{j}$, längs des Streckenzuges, der das Rechteck $1 \le x \le 4$, $0 \le y \le 2$ begrenzt, mit negativer Umlaufrichtung.

4) $\underline{v}(\underline{r}) = x^2\cdot \underline{i} + y^2\cdot \underline{j} + z^2\cdot \underline{k}$, der Integrierungsbereich ist die geschlossene Fläche $\mathcal{F}$, die durch die Koordinatenebenen und die Fläche $x^2 + y^2 + 2z = 1$ bestimmt ist, mit nach außen weisendem Oberflächenelement.

5) $\underline{v}(\underline{r}) = xz\cdot \underline{i} + xy\cdot \underline{j} + yz\cdot \underline{k}$, der Integrierungsbereich ist die geschlossene Fläche $\mathcal{F}$, die durch die Fläche $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ und die xy Koordintenebene bestimmt ist, mit nach innen weisendem Oberflächenelement.