$\boxed{\text{2. VIZSGA}}$ Ala GTK 2024.06.04.

(1) $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 10x = x(x^3 + x^2 - x - 10)$ $\boxed{x_1 = 0 \text{ gyök}}$ (1)

$x_2: \pm 1 \ \pm 2 \ \pm 5 \ \pm 10$

$\boxed{x_2 = 2 \text{ gyök}}$ (1)

$(x^3 + x^2 - x - 10) : (x - 2) = x^2 + 3x + 5$ (2p)

$x^3 - 2x^2$

$3x^2 - x$

$3x^2 - 6x$

$5x - 10$

$5x - 10$

0

$x_{3,4} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 - 20}}{2}$ nem valós (2)

$P(x) = x(x-2)(x^2 + 3x + 5)$ (2)

(2) Monot., korl., inf, sup, min, max

$a_n = \dfrac{n+4}{3-n} - 3$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \frac{4}{n}}{\frac{3}{n} - 1} - 3 = -4$

a_n konvergens, így korlátos is (1)

$a_{n+1} \lesseqgtr a_n$

$\dfrac{n+5}{2-n} - \cancel{3} \lesseqgtr \dfrac{n+4}{3-n} - \cancel{3} \quad \Big/ \cdot \underbrace{(3-n)(2-n)}_{\text{pozitív}}$

$(n+5)(3-n) \lesseqgtr (n+4)(2-n)$ $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^+ : a_{n+1} > a_n$ (1)

$-n^2 - 2n + 15 \lesseqgtr -n^2 - 2n + 8$ $\qquad \Rightarrow$ <u>szig.</u> mon. növő a sorozat

$15 > 8$ (2)

$\inf a_n = \min a_n = a_4 = -11$ (2)

$-11 = a_4 \quad 0_5 \quad a_6 \quad -4$

$\sup a_n = -4 \ (\lim \ldots)$ (1), $\max a_n$ nem létezik (1)

(3) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\} \\ \frac{\pi}{2} & x \in \{0; 1\} \end{cases}$

- arctg függvény $\mathbb{R}$-en folytonos, így csak a 0 és 1 lehet esetleg szakadási hely
- $\frac{1}{x}$ csak 0-ban nincs értelmezve (így nem is folytonos) (2)

$\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{arctg}(\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{\to -\infty}) = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{arctg}(\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{\to \infty}) = \frac{\pi}{2}$ 2

$x=0$ szakadási hely, ugrás típusú 1

$\lim\limits_{x\to 1} \operatorname{arctg}(\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{\to 1}) = \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2}$ $x=1$ megszüntethető" szakadás, 2

de itt nem folytonos az f. 1

4) $f(x) = \dfrac{2}{1+e^x}$ 1

1) $D_f = \mathbb{R}$

2) $f(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, zh. nincs

3) nem ps, nem ptlan, nem periodikus

4) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2}{1+e^x} = \dfrac{2}{1+0} = 2$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2}{1+e^x} = 0$ $\left(\text{"}\dfrac{2}{\infty}\text{"}\right)$

vízszintes aszimptoták + és − ∞-ben 1

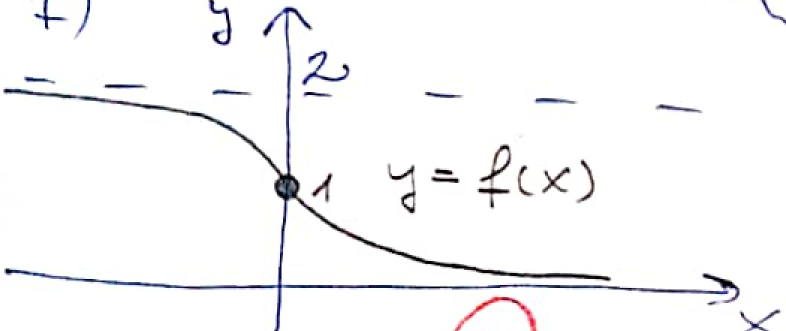
5) $f'(x) = \dfrac{0-2\cdot e^x}{(1+e^x)^2} < 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ szig. mon. csökk. 2

6) $f''(x) = \dfrac{-2e^x\cdot(1+e^x)^2 + (+2e^x)\cdot 2\cdot(1+e^x)\cdot e^x}{(1+e^x)^4} =$

$= \dfrac{2e^x\cdot(1+e^x)\cdot[-(1+e^x)+2e^x]}{(1+e^x)^4} = \dfrac{2e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$ 2

	$x<0$	0	$x>0$
f''	−	0	+
f	konkáv ⌒	IP	konvex ⌣

7)



1

8) $R_f =]0;2[$ 1

⑤ a) $\int \underbrace{(x+1)}_{g'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{f} dx = \left(\frac{x^2}{2}+x\right) \cdot \ln x$ (1) $- \int \frac{x}{2} + 1\, dx =$

$g = \frac{x^2}{2} + x \quad f' = \frac{1}{x}$ (1)

$= \left(\frac{x^2}{2}+x\right) \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} - x + c$ (1)

$c \in \mathbb{R}$ (1)

b) $\int \frac{x}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{1+x^2} \cdot (2x)\, dx$ (2) $= \frac{1}{2} \cdot \ln|1+x^2| + c$ (2p) $c \in \mathbb{R}$

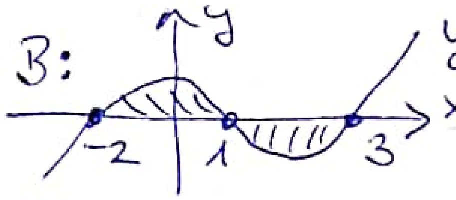
⑥ $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x+2)(x^2 - 4x + 3) =$

$= (x+2)(x-1)(x-3)$

gyökök: $x = -2$ ✓

$x = 1$ és $x = 3$

B:



$y = f(x)$ (2p)

$T_B = \int_{x=-2}^{1} f(x)\, dx + \left| \int_{1}^{3} f(x)\, dx \right| =$ (2p)

(2p) (prim. fv.)

$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x\right]_{-2}^{1} + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x\right]_{1}^{3} =$

$= \frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{5}{2} + 6 - \left(4 + \frac{16}{3} - 10 - 12\right) + \frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{5}{2} + 6 - \left(\frac{81}{4} - \cancel{18} - \frac{45}{2} + \cancel{18}\right)$

(2p)