2. zh | MatAla GTK 2024. 04.

① $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n - n^2 + 2n - 2}{-2^n + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{n^2}{2^n} + \frac{2n}{2^n} - \frac{2}{2^n}}{-1 + \frac{n}{2^n}}$ 2p

$\text{"}\frac{\infty}{-\infty}\text{"}$ $\qquad \frac{n}{2^n} \to 0$

$= -\infty$ mert $\text{"}\frac{\infty}{-1}\text{"}$ típusú 2p

② $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 6x - 7}{2x^2 + 3x + 1} & x \neq \frac{-1}{2},\ x_2 \neq -1 \\ 8 & x = \frac{-1}{2} \text{ ill. } x_2 = -1 \end{cases}$

$2x^2 + 3x + 1 = 0 \iff x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4}$ $\quad x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{-1}{2}$ 1

ezek a szakadási helyek

$\mathbb{R} \setminus \{\frac{-1}{2}; -1\}$ -en biztosan folytonos (mert itt f rac. törtfgv., és értelmezve van). 1

$\lim_{x\to\frac{-1}{2}^{\ominus}} f(x) = \lim_{x\to\frac{-1}{2}^{\ominus}} \frac{(x+1)(x-7)}{2(x+1)(x+\frac{1}{2})} = \lim_{x\to\frac{-1}{2}^{\ominus}} \frac{x-7}{2(x+\frac{1}{2})} = \infty$

$\text{"}\frac{-7{,}5}{0^{\ominus}}\text{"}$

$\lim_{x\to\frac{-1}{2}^{\oplus}} f(x) = \lim_{x\to\frac{-1}{2}^{\oplus}} \frac{x-7}{2(x+\frac{1}{2})} = -\infty$ 1p

$\text{"}\frac{-7{,}5}{0^{\oplus}}\text{"}$

$-\frac{1}{2}$-ben pólus, itt nem folyt. az f.

$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x-7}{2(x+\frac{1}{2})} = \frac{-8}{2\cdot(\frac{-1}{2})} = +8 = f(-1)$

tehát itt folytonos az f. 1p

③ a) $\left(3x^2 - \frac{1}{x}\right)' = 6\cdot x + \frac{1}{x^2}$ 2p

b) $\left(\ln(x+\sqrt{x})\right)' = \dfrac{1+\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}}{x+\sqrt{x}}$ 2p

④ $f(x) = x+\sqrt{x}$, $\underbrace{\text{érintő} \parallel y = 2x+5}_{f'(x_0)=2}$ 1

$f'(x) = 1 + \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$ 1 $= 2 \iff \frac{1}{\sqrt{x}} = 2 \iff x_0 = \frac{1}{4}$

$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ 1

érintő egyenlete:

$y = 2\cdot\left(x - \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4}$ 1

$y = 2x + \frac{1}{4}$

⑤ $f(x) = \dfrac{2x^2+6}{x-1} = 2\cdot\dfrac{x^2+3}{x-1}$ $\boxed{x \neq 1 \ !!!}$

$f'(x) = 2\cdot\dfrac{2x(x-1)-(x^2+3)\cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{2\cdot(x^2-2x-3)}{(x-1)^2}$ 1p

$f'(x) = 0$ ? $x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \overset{4}{\sqrt{4+12}}}{2}$ $x_1 = 3$ ✓ $(\in D_f)$; $x_2 = -1$ ✓ 1p

| | $x<-1$ | $-1$ | $]-1;1[$ | $1$ | $]1;3[$ | $3$ | $x>3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | + | 0 | — | // | — | 0 | + | 1 |
| $f$ | szig.m. nő | lok max | szig.m. csökk | // | szig.m. csökk | lok min | szig.mon. nő | 1 |

$(f(-1) = -4,\ f(3) = 12)$