

**Elméleti kérdések (4 × 3p = 12 pont)**

1. Mondja ki a valós számsorozatokra vonatkozó Bolzano-Weierstrass tételt (kiválasztási tételt).
2. Mikor nevezünk egy valós, egyváltozós függvényt korlátosnak? Adjon egy példát is korlátos függvényre.
3. Lokális maximum létezésének egy elégséges feltétele deriválható függvényeknél (az első derivált segítségével) egy  $x_0$  pontban.
4. A határozatlan integrál definíciója.

**Feladatok (48 pont)**

1. (8 p) Mutassa meg teljes indukcióval, hogy az alábbi egyenlőség minden (pozitív) természetes  $n$  számra igaz.

$$\sum_{k=1}^n k \cdot (k+1) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3}$$

2. (4 + 4 p) Sorozat limesze.

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n} + 9}{n + 1} =$

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 - 4^n + 5^n} =$

3. (8 p) Határozza meg az alábbi függvény értelmezési tartományát és a deriváltfüggvényét. Majd írja fel az érintő egyenletét az  $x_0 = 3$  pontban.

$$f(x) = x^x$$

4. (8 p) Egy felül nyitott, négyzet alapú hasáb alakú tároló elkészítéséhez  $75 \text{ dm}^2$  területű lemezre volt szükség. Milyen hosszúak a tároló élei, ha a térfogata maximális?
5. (4 + 4 p) Számítsa ki a határozatlan integrálokat.

(a)  $\int (x - 1) \cdot \sin(2x) dx = ?$

(b)  $\int \frac{3}{4 + 9x^2} dx = ?$

6. (8 p) Határozza meg integrálszámítással a függvénygörbe adott intervallum feletti darabjának  $x$ -tengely körüli megforgatásával kapott forgástest felszínét és térfogatát.

$$f(x) = 4x + 1 \quad x \in [0; 3]$$