

Integrálszámítás

A határozatlan integrál

1) Alapintegrálok

$$\int \frac{3x^4 - 2x^2 - x + 5}{x^2} dx \quad \int e^{2x} - 3^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + \frac{3}{x} dx \quad \int \frac{6^x - 9^x}{3^{x+1}} dx$$
$$\int \frac{\sin(2x)}{2} - \frac{1}{5 + 5x^2} dx \quad \int \frac{x^2}{1 + x^2} + \operatorname{ch}(x) dx \quad \int \frac{\sin(2x)}{\cos(x)} + 6 dx$$
$$\int \frac{-1}{\cos^2(x)} + \sqrt{x^5 \cdot \sqrt{x}} dx \quad \int \frac{-7}{\sqrt{4 - 4x^2}} dx$$

2) Parciális integrálás

$$\int (x - 1) \cdot e^{3x} dx \quad \int x^2 \cdot \ln(x) dx \quad \int x^2 \cdot e^{-3x} dx$$
$$\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx \quad \int \arcsin(x) dx \quad \int 4^x \cdot \sin(x) dx$$
$$\int (x^2 + x - 5) \cdot \cos(x) dx$$

3) Helyettesítéses integrálás 1. típus

$$\int \sin\left(\frac{x}{4} + 3\right) dx \quad \int x \cdot \sin(x^2 + 1) dx \quad \int x^2 \cdot e^{-x^3} dx$$
$$\int \sqrt{6x - 1} dx \quad \int \frac{2x + 3}{x^2 + 1} dx \quad \int e^{-\frac{3x+5}{2}} dx$$
$$\int \operatorname{ctg}(x) dx \quad \int 5\cos^5(x) \cdot \sin(x) dx \quad \int \cos^3(x) \cdot \sin^3(x) dx$$
$$\int \frac{\sqrt[3]{1 + \operatorname{tg}(x)}}{\cos^2(x)} dx \quad \int 8^{\operatorname{ctg}(x)} \cdot \frac{2}{\sin^2(x)} dx \quad \int \frac{x + 1}{\sqrt[3]{2x^2 + 4x + 1}} dx$$
$$\int \frac{1}{x \cdot (\ln(x))^3} dx \quad \int (5x^2 - 12)^7 \cdot x dx$$

4) Helyettesítéses integrálás 2. típus

$$\int \sqrt{1 + x^2} dx \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$
$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \quad \int \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{1 - x^2}} dx$$

5) Racionális törtfüggvények integrálása

$$\int \frac{x^2 + 5}{x + 2} dx \quad \int \frac{2}{x^2 - 6x + 5} dx \quad \int \frac{3x - 2}{x^2 + 4x + 3} dx$$

$$\int \frac{-2}{(x - 2)(x + 2)^2} dx \quad \int \frac{-9}{(x + 1)(x^2 + 1)} dx$$

$$\int \frac{1}{x^2 - x + 3} dx \quad \int \frac{2x + 1}{x^2 - x + 3} dx \quad \int \frac{x^3 - 2x^2 + 9x}{x^2 - x + 3} dx$$

A határozott integrál

1) A Newton-Leibniz formula alkalmazása

$$\int_{x=0}^5 x^2 - 5x - 6 dx \quad \int_{x=0}^{\frac{3\pi}{4}} \sin(2x) dx \quad \int_{x=0}^1 \frac{1}{1 + x^2} dx$$

$$\int_{x=0}^{0,5} \frac{1}{1 - x^2} dx \quad \int_{x=0}^{\frac{2}{3}} \sqrt{4x + 1} dx \quad \int_{x=0}^1 \sqrt{1 + x^2} dx$$

$$\int_{x=0}^1 \sqrt{1 - x^2} dx \quad \int_{x=-1}^3 x^2 \cdot e^{2x} dx \quad \int_{x=1}^{\frac{4}{3}} \ln(3x + 2) dx$$

2) Görbe alatti terület

Számítsa ki a megadott függvény görbéje alatti területet az adott intervallumon!

- a) $f(x) = x^2 - 5x - 6$ és $x \in [0; 5]$
- b) $f(x) = \cos(2x)$ és $x \in [-\pi; \pi]$
- c) $f(x) = x^3$ és $x \in [-1; 2]$

Határozza meg a megadott függvények görbéi által határolt korlátos tartomány területét!

- d) $f(x) = x^2$ és $g(x) = x^2$
- e) $f(x) = x^2 - 4$ és $g(x) = x + 2$
- f) $f(x) = \sin(x)$ és $g(x) = \cos(x)$ két szomszédos metszéspontja közé eső intervallumon

Számítsa ki a paraméteres alakban adott görbék által az adott módon meghatározott tartomány területét!

- g) $\begin{cases} x(t) = 4(t - \sin(t)) \\ y(t) = 4(1 - \cos(t)) \end{cases}$ ciklois egy íve és a koordinátatengelyek által meghatározott tartomány.
- h) $\begin{cases} x(t) = 1 \cdot \cos(t) \\ y(t) = 2 \cdot \sin(t) \end{cases}$ ahol $x \in [0; \frac{\pi}{3}]$ ellipsziscikk.

3) Ívhossz

Számítsa ki a megadott intervallumon a függvénygörbe ívhosszát!

a) $f(x) = 2x^2 + 2$ és $x \in [1; 5]$

b) $f(x) = \operatorname{ch}(x)$ és $x \in [0; 1]$

c) $\begin{cases} x(t) = 4(t - \sin(t)) \\ y(t) = 4(1 - \cos(t)) \end{cases}$ ciklois a $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$

4) Forgástest felszíne, térfogata

Határozza meg a függvénygörbe adott intervallum feletti megforgatásával kapott forgástest felszínét és térfogatát!

a) $f(x) = \sin(x)$ és $x \in [0; \frac{3\pi}{2}]$

b) $f(x) = 4x + 1$ és $x \in [0; 3]$

c) $\begin{cases} x(t) = 1 \cdot \sin(t) \\ y(t) = 2 \cdot \cos(t) \end{cases}$ és $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$

5) Improprius integrál

$$\int_{x=1}^{\infty} \frac{4}{x^2} dx$$

$$\int_{x=10}^{\infty} \frac{e^x}{1 - e^{2x}} dx$$

$$\int_{x=1}^{\sqrt{2}} x \cdot \ln(x^2 - 1) dx$$

$$\int_{x=-\infty}^{-1} \frac{-1}{x^4} dx$$

$$\int_{x=0}^1 \ln(x) dx$$

$$\int_{x=-1}^2 \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} dx$$

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx$$

$$\int_{x=0}^1 x \cdot \ln(x) dx$$

Halmschlager Andrea