(1) $\dfrac{3x^2+7x-4}{x^2+2x-3} < 2$ $\qquad x^2+2x-3=(x-1)(x+3)\neq 0$ $\boxed{x\neq 1 \text{ és } x\neq -3}$

$\Updownarrow$

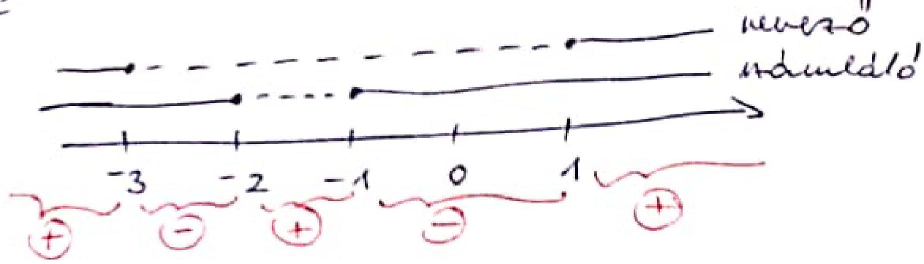
$$\frac{3x^2+7x-4}{x^2+2x-3} - \frac{2(x^2+2x-3)}{x^2+2x-3} < 0$$

$\Updownarrow$

$$\frac{x^2+3x+2}{x^2+2x-3} < 0$$

$\Updownarrow$

$$\frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x+3)} < 0$$



$\Updownarrow$

$x\in\,]-3;-2[\, \cup\,]-1;1[$

(2) $\dfrac{x^3-x^2-14x+24}{x^3-5x^2+6x} = P(x) = \dfrac{\cancel{(x-2)}\cancel{(x-3)}(x+4)}{x\cdot\cancel{(x-2)}\cancel{(x-3)}} = \dfrac{x+4}{x}$

számláló: $x_1=2$ gyök $\qquad x^3-x^2-14x+24 : (x-2) = \underbrace{x^2+x-12}$

$$\begin{array}{l} x^3-x^2-14x+24 \\ \underline{x^3-2x^2} \\ \quad x^2-14x \\ \quad \underline{x^2-2x} \\ \qquad -12x+24 \\ \qquad \underline{-12x+24} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

$$x_{2,3}=\frac{-1\pm\overset{7}{\sqrt{1+48}}}{2} = \begin{cases} x_2=-4 \\ x_3=3 \end{cases}$$

nevező: $x_1=0$ gyök $\qquad x(x^2-5x+6) \Rightarrow x_{2,3}=\dfrac{5\pm\overset{1}{\sqrt{25-24}}}{2} \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

(3) $\left.\begin{array}{l} f(x)=\sqrt[4]{x} \\ g(x)=\dfrac{1}{\ln x} \end{array}\right\}$ $\quad f\circ g\,(x)=\sqrt[4]{\dfrac{1}{\ln x}}$ $\qquad \underbrace{x>0 \text{ és } \frac{1}{\ln x}>0}$ $\quad D_{f\circ g}=\,]1;\infty[$

$g\circ f\,(x)=\dfrac{1}{\ln(\sqrt[4]{x})}$ $\qquad x>0$ és $\ln x\neq 0 \Rightarrow D_{g\circ f}=\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$

(4) $f(x)=\dfrac{1}{x(x-3)}$

1) $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0;3\}$

2) zérushely nincs (számláló sosem nulla)

3) nem ps, nem páratlan, nem periodikus

4) limeszek

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+/-\infty}\frac{1}{x^2-3x} \underset{\text{"}\frac{1}{\infty}\text{"}}{=} 0$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x-3} \underset{\text{"}-\infty\cdot(-\frac{1}{3})\text{"}}{=} +\infty \text{ ill. } \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x-3} \underset{\text{"}+\infty\cdot(-\frac{1}{3})\text{"}}{=} -\infty \quad (\text{pólus } x=0\text{-ban})$$

$$\lim_{x\to3^-}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x-3} \underset{\text{"}\frac{1}{3}\cdot(-\infty)\text{"}}{=} -\infty \text{ ill. } \lim_{x\to3^+}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x-3} \underset{\text{"}\frac{1}{3}\cdot\infty\text{"}}{=} +\infty \quad (\text{pólus } x=3\text{-ban is})$$

5) $f'(x) = \left(\frac{1}{x^2-3x}\right)' = \frac{0-1\cdot(2x-3)}{(x^2-3x)^2} = \frac{-2x+3}{(x^2-3x)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

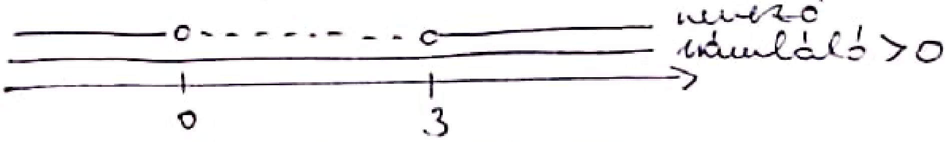
	$x<0$	0	$]0;\frac{3}{2}[$	$\frac{3}{2}$	$]\frac{3}{2};3[$	3	$x>3$
f'	+	///	+	0	−	///	−
f	↗	///	↗	lok max	↘	///	↘

$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}-3\right)} = \frac{-4}{9}$

6) $f''(x) = \left(\frac{-2x+3}{(x^2-3x)^2}\right)' = \frac{-2(x^2-3x)^{\cancel{2}} - (-2x+3)\cdot 2\cancel{(x^2-3x)}\cdot(2x-3)}{(x^2-3x)^{\cancel{4}3}} =$

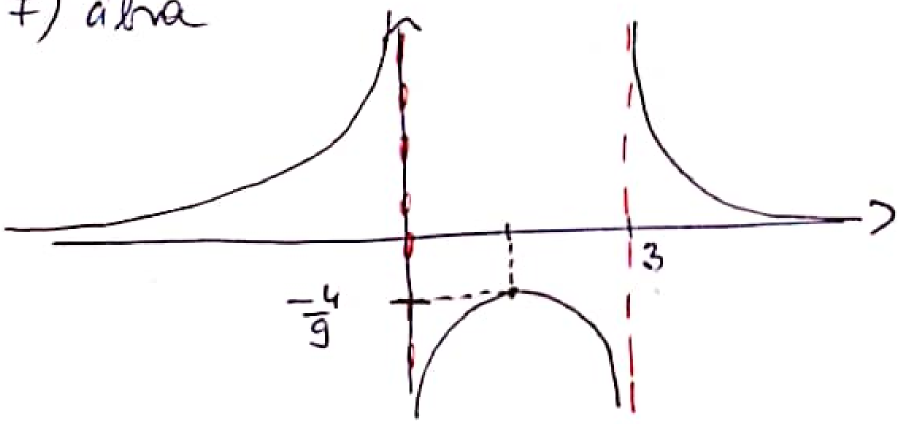
$= \frac{(-2x^2+6x)+2(2x-3)^2}{(x^2-3x)^3} = \frac{(-2x^2+6x)+(8x^2-24x+18)}{(x^2-3x)^3} = \frac{6x^2-18x+18}{(x^2-3x)^3} =$

$= 6\cdot\frac{x^2-3x+3}{(x^2-3x)^3}$ $\quad f''(x)=0 \Leftrightarrow x^2-3x+3=0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{3\pm\sqrt{9-12}}{2}}_{\text{nem valós}}$



	$x<0$	0	$]0;3[$	3	$x>3$
f''	+	///	−	///	+
f	konvex	///	konkáv	///	konvex

7) ábra



8) É.K.

$R_f =]-\infty; -\frac{4}{9}[\cup]0;\infty[$

⑤ Rita: max 10 óra tanulásra
x óra alatt $10 \cdot x$ %-ot megtanul
DE! fáradás miatt x^2 pontot veszít a 100 pontos vizsgán

$f(x)$: ennyi pontja lett a vizsgán x óra tanulással
felejtés nélkül $f(x) = 10 \cdot x$ lenne...
felejtéssel $f(x) = 10 \cdot x - x^2$
$f'(x) = 10 - 2x$

	$[0;5[$	5	$]5;10]$
f'	+	0	−
f	↗	LOK MAX	↘

a fenti feltételek mellett 5 óra tanulással éri el a legtöbb vizsgapontot.
$f(5) = 50 - 25 = 25$ pontot szerez ekkor, ami nem elég a legalább kettesre...
Az adott kondíciókkal NEM célravezető a kampánytanulás.

⑥ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $x \in \mathbb{R}$ ⇒ y-tg körül forgatni

$V_{forgástest} = ?$

$$V_{f.t.} = \pi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,dx = \pi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \pi \cdot \left[\lim_{R \to -\infty} \int_{R}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \lim_{S \to \infty} \int_{0}^{S} \frac{1}{1+x^2}\,dx \right] =$$

$$= \pi \cdot \left[\lim_{R \to -\infty} (\underbrace{\operatorname{arctg} 0}_{=0} - \underbrace{\operatorname{arctg} R}_{\to -\pi/2}) + \lim_{S \to \infty} (\underbrace{\operatorname{arctg} S}_{\to \pi/2} - \underbrace{\operatorname{arctg} 0}_{=0}) \right] =$$

$$= \pi \cdot \left(-\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} \right) = \pi^2 \quad (\text{térfogategység})$$