A többváltozós analízis mérnöki alkalmazásai
Házi feladatok

Dinamikai rendszerek

A logisztikus modell halászattal (aratással - harvesting) módosított változatának vizsgálata. (Izoklinák, iránymező, szinguláris (=konstans) megoldások, ezek stabilitása, integrálgörbék, az eredmények interpretálása.)
Vállalta: Matúz Máté

Lineáris algebra és sorok

1. Adott az alábbi három sík az egyenletével. Hány dimenziós a közös pontok halmaza? Mi a síkok kölcsönös helyzete a térben?

$$\begin{array}{rcl} S_1: \quad z & = & \frac{5}{2} - x - \frac{1}{2}y \\ S_2: \quad z & = & 3 - x - y \\ S_3: \quad z & = & \frac{8}{3} - x - \frac{2}{3}y \end{array}$$

2. Mely $x \in \mathbb{R}$ érték(ek) esetén diagonalizálható az $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 5 & x \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ mátrix?

3. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ szimmetrikus mátrix. Mutassuk meg, hogy ekkor
   (a) minden sajátérték valós;
   (b) két sajátérték pontosan akkor azonos, ha $\mathbf{A} = \alpha \cdot \mathbf{E}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, és ekkor a sík összes nemnulla vektora sajátvektor;
   (c) ha két különböző sajátérték van, akkor mátrix sajátalterei merőlegesek egymásra.

4. Legyen $\mathbf{A},\ \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, és tegyük fel, hogy $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$. ($\mathbf{E}$ az $n \times n$-es egységmátrix.) Mutassuk meg, hogy ekkor $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E}$ is szükségszerűen teljesül. (Vigyázat, itt még nem használhatjuk az inverz mátrix fogalmat/definíciót.)

5. Legyen $\mathbf{A},\ \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Mutassuk meg, hogy
   (a) ha $\mathbf{A}^2$ ivertálható, akkor $\mathbf{A}$ is invertálható;

(b) általában: ha $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ invertálható, akkor $\mathbf{A}$ is és $\mathbf{B}$ is invertálható;
(Vigyázat, itt most még nem használható, hogy $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$.)
Segítség: $rang\,(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \leq rang\,(\mathbf{A})$, hasonlóan $rang\,(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \leq rang\,(\mathbf{B})$, következésképp $rang\,(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \leq \min\,(rang\,(\mathbf{A})\,; rang\,(\mathbf{B}))$.

6. Mutassuk meg, hogy egy $\mathrm{A}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ homogén lineáris leképezés megtartja a párhuzamosságot.

7. Keressük meg az összes olyan $\Phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezést, amelynek a magtere az $x + 2y - z = 0$ sík.

8. Írjuk fel az összes olyan $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ diagonális mátrixot, amire $\mathbf{A}^2 = \mathbf{E}$ teljesül. ($\mathbf{E}$ a 2×2-es egységmátrix.) Geometriailag miféle transzformációk ezek?

9. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ olyan, hogy $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots, v_n) \neq \mathbf{0}$, és $\mathbf{A} = (v_i \cdot v_j)_{n\times n}$ (azaz az i-edik sor j-edik eleme $v_i \cdot v_j$). Számoljuk ki az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

10. Írjuk fel annak a térbeli geometriai transzformációnak a mátrixát, amely az origón átmenő, $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \cos(\beta) \\ \cos(\gamma) \end{pmatrix}$ irányvektorú egyenes körüli $\varphi = \frac{\pi}{6}$ szöggel való forgatás. Az $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ rögzített.

11. Adott a következő rekurzív sorozat:
$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$, ha $n \geq 2$, és $a_0 = -1,\ a_1 = 1$
Adjunk csak n-től függő zárt képletet az a_n kiszámítására, és vizsgáljuk meg a sorozat konvergenciáját! (Tipp: átírás 2×2-es diszkrét dinamikai rendszerré.)

12. Milyen görbét ír le a következő kvadratikus egyenlet? (Indoklás: főtengely-transzformációval.)
$7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$

13. Mutassuk meg, hogy ha $\lambda \in \mathbb{C}$ nem-valós sajátérték, és a hozzá tartozó sajátvektor $\mathbf{s}_\lambda = \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot i$ (ahol $\mathbf{u},\ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$), akkor $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ lineárisan független.

14. Igazoljuk, hogy ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\psi)^{2n}\, d\psi = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots (2n)} \cdot \frac{\pi}{2}$$

15. Egy bizonyos integrált a

$$2\pi \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots (2n)} \right)^2 \cdot \frac{1}{4^m}$$

sor első n tagjával közelítettünk, ahol g a gravitációs gyorsulás mértéke, l pedig egy hosszúság.
Legalább hány tagot kell figyelembe venni, hogy a fellépő hiba, $\epsilon = \frac{1}{1000}$-nél kisebb legyen a $\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1\cdot 3\cdot\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots(2n)} \right)^2 \cdot \frac{1}{4^m}$ sorra vonatkozóan? (Becsüljük az $\left|\sum_{m=n}^{\infty}\right|$ összeget!)

16. Hatványsorfejtés segítségével adjuk meg a közelítő értékét az alábbi integrálnak úgy, hogy a fellépő hiba legfeljebb 10^{-4} legyen!

$$\int_{t=0}^{1} \frac{\sin t}{t} dt$$

17. Adja meg azt az ötödfokú polinomot, amellyel az alábbi integrál a legjobban (legpontosabban) közelíthető!

$$\int_{t=0}^{x} \cos(t^2) dt$$

18. Egy forgásellipszoid kis- és nagyféltengelye a és $b = a \cdot \sqrt{1+\varepsilon^2}$, ahol $a,\ \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ adott konstansok.
Az ellipszoid felszíne $A = 2a^2\pi \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon\right) \cdot \arctan(\varepsilon)\right)$.
Adjunk közelítő képletet a felszínre, azaz az $A = A(\varepsilon)$ függvényértékre az ε-szerinti hatványsorba fejtés segítségével.
Határozzuk meg a felszín közelítő értékét az előbbi hatványsor segítségével az $a = 1$ és $\varepsilon = 0,1$ esetben, ha legfeljebb $0,001$ nagyságú hiba megengedett.

19. Az elektromos dipólus potenciálja:

$$V(x;y;z) = \lim_{h\to 0} \left(\frac{q}{(x-h)^2 + y^2 + z^2} - \frac{q}{(x+h)^2 + y^2 + z^2} \right) \cdot \frac{1}{2h}$$

ahol a két töltés nagysága q (ellentétes előjellel), és távolságuk kezdetben $2h \in \mathbb{R}^+$. Adjunk közelítést a potenciál értékére h-szerinti hatványsorba fejtéssel.

20. A térbeli potenciálelméletben bukkan fel a következő képlet:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \cdot z^n$$

Határozza meg (hatványsorba fejtés segítségével) a $P_0,\ P_1,\ P_2$ tényezőt!

Vállalta:
1, 2, 3 : Szabó Richárd
4, 5, 6 : Seben Domonkos
7, 8, 9 : Hajdu-Moharos Áron, Szili Bettina
10, 11, 12 : Wieszt Bonifác
13, 14 : Marits Márton
A 120 csúcsú, "piros-kék" gráf vizualizálása: Szathmári Dominik
15, 16, 19 : Simon Bertalan
17, 18, 20 : Fekete Balázs
A többváltozós 4 feladatból:
1, 2 : Hirják Árpád, Szalay Szabolcs
3, 4 : Ambrus Szilárd, John Benedek