Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2023. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

1. előadás:
A halmazelmélet alapjai, egyenletek és egyenlőtlenségek, matematikai állítások szerkezete és bizonyítási módszerek

Halmazok

Alapfogalom(Axióma): olyan alapfeltevés, melyet bizonyítás nélkül fogadunk el. A **"halmaz"** és **"halmazhoz tartozás"** alapfogalmak.

> " Meghatározott és jól megkülönböztethető dolgok összesége. "
>
> Cantor (1895)

Egy halmaz akkor adott, ha minden objektumról eldönthető, hogy hozzá tartozik-e, továbbá ha bármely két elemről eldönthető, hogy azonosak-e.

Jelölés:

halmazok: $A, B...$ nagybetűk
elemek: $a, b...$ kisbetűk
$a \in A$ eleme, $b \notin A$ nem eleme

Megadás:

- Az elemek **felsorolás**ával: $A = \{a, b, c\}$
- Rögzítsünk egy **alaphalmazt**, amely tartalmazza az összes vizsgálható objektumot, és adjunk meg egy minden elemre egyértelműen eldönthető logikai tulajdonságot:

$$A = \{a \text{ szám} \,|\, a \leq 1 \text{ és egész}\} = \{1, 0, -1, -2, ...\}$$

Halmazok

Tartalmazás (relációk)

- Az A halmaz **részhalmaza** a B halmaznak (jel: $A \subseteq B$), ha A minden eleme egyúttal eleme B-nek is.
- Az A halmaz **valódi(szigorú) részhalmaza** a B halmaznak (jel: $A \subset B$), ha A minden eleme eleme B-nek is, de van olyan B-beli elem, amely nem eleme A-nak.
- Az A és B **halmazok egyenlők**, ha A részhalmaza B-nek és B is részhalmaza A-nak (azaz, pontosan ugyanazok az elemeik).
- Az **üres halmaz** az a halmaz (jel: $\emptyset$ vagy $\{\,\}$), amelynek egyetlen szóba jöhető objektum sem eleme.
- A és B **diszjunkt**, ha nincs közös elemük.

Halmazok

Műveletek

- A és B halmazok **uniója** azon $A \cup B$ halmaz, amelynek minden eleme az A és B halmazok közül legalább az egyikben benne van.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\}.$$

- A és B halmazok **metszete** azon $A \cap B$ halmaz, amelynek minden eleme az A és B halmazoknak is eleme.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \in B\}.$$

- A halmaz és B halmaz ebben a sorrendben vett **különbsége** azon $A \setminus B$ halmaz, amely tartalmazza A halmaznak minden olyan elemét, amely B halmazban nincs benne.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \notin B\}.$$

- Ha H az alaphalmaz, akkor $\overline{A} = H \setminus A$ lesz a **komplementer** halmaza.
- Az A és a B halmazok **Descartes-szorzata** olyan rendezett elempárok halmaza, melyek első eleme A-ból, második eleme B-ből való:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Halmazok - Példa

Legyen $A = \{1, 2\}$ és $B = \{2, 3, 4\}$ és $H = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ az alaphalmaz.

Mi lesz $A \cup B$, $\overline{A \cup B}$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \times B$, $B \times A$ és $(A \times B) \setminus (B \times A)$?

Halmazok - Példa

Legyen $A = \{1, 2\}$ és $B = \{2, 3, 4\}$ és $H = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ az alaphalmaz.

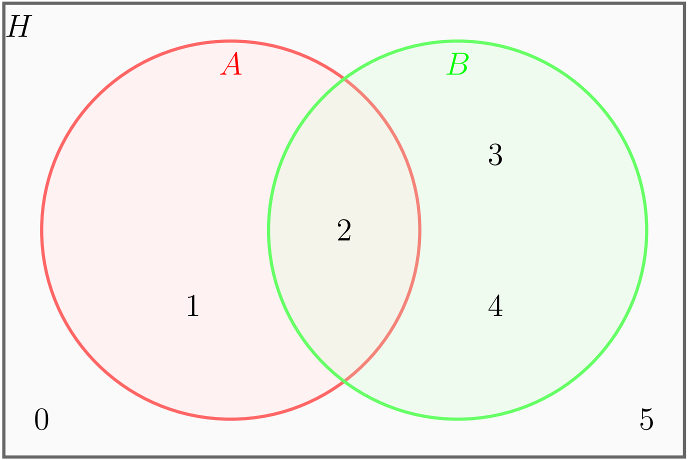
Mi lesz $A \cup B$, $\overline{A \cup B}$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \times B$, $B \times A$ és $(A \times B) \setminus (B \times A)$?

$$\begin{aligned}
A \cup B &= \{1, 2, 3, 4\}, \\
\overline{A \cup B} &= \{0, 5\}, \\
A \cap B &= \{2\}, \\
A \setminus B &= \{1\}, \\
A \times B &= \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (1, 4), (2, 4)\} \\
B \times A &= \{(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)\} \\
(A \times B) \setminus (B \times A) &= \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (1, 4), (2, 4)\}.
\end{aligned}$$

Halmazok - Példa

Legyen $A = \{1, 2\}$ és $B = \{2, 3, 4\}$ és $H = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ az alaphalmaz.

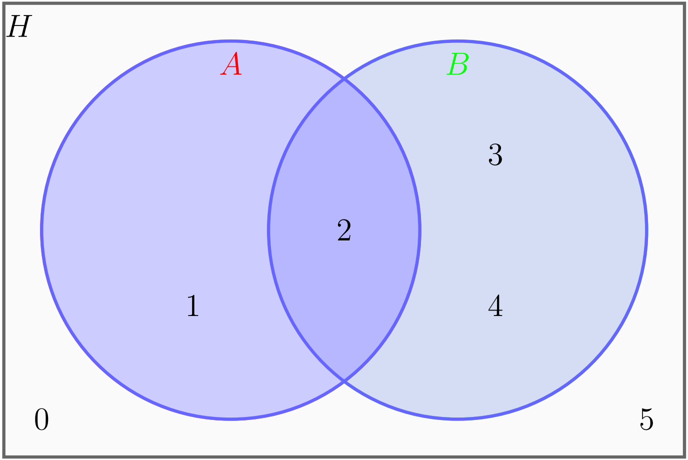
Ábrázoljuk Venn-diagrammal $A \cup B$, $\overline{A \cup B}$, $A \cap B$ és $A \setminus B$ halmazokat!



Halmazok - Példa

Legyen $A = \{1, 2\}$ és $B = \{2, 3, 4\}$ és $H = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ az alaphalmaz.

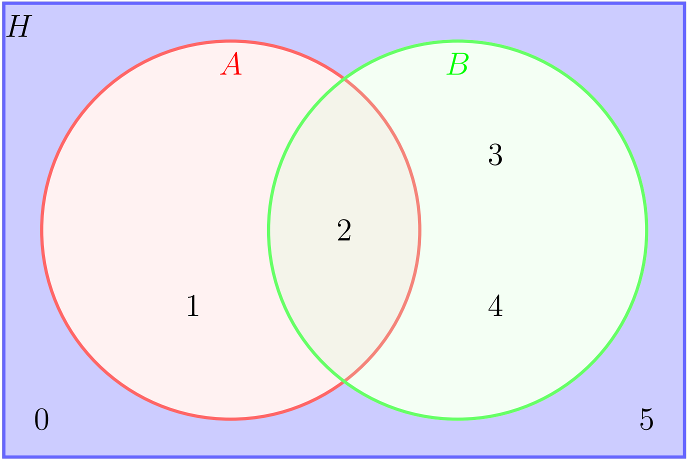
Ábrázoljuk Venn-diagrammal $A \cup B$, $\overline{A \cup B}$, $A \cap B$ és $A \setminus B$ halmazokat!



Halmazok - Példa

Legyen $A = \{1, 2\}$ és $B = \{2, 3, 4\}$ és $H = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ az alaphalmaz.

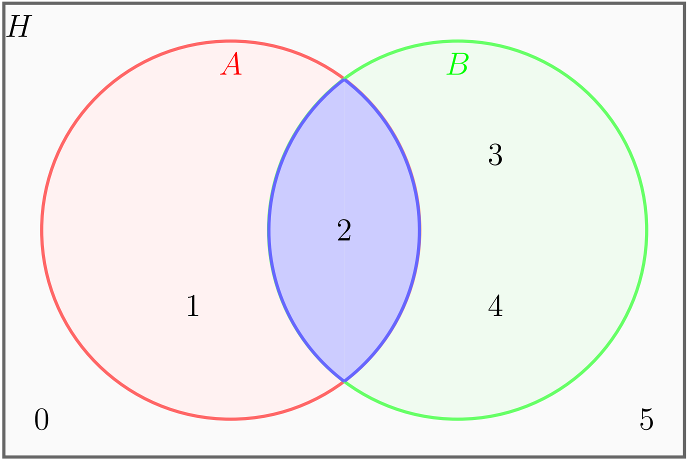
Ábrázoljuk Venn-diagrammal $A \cup B$, $\overline{A \cup B}$, $A \cap B$ és $A \setminus B$ halmazokat!



Halmazok - Példa

Legyen $A = \{1, 2\}$ és $B = \{2, 3, 4\}$ és $H = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ az alaphalmaz.

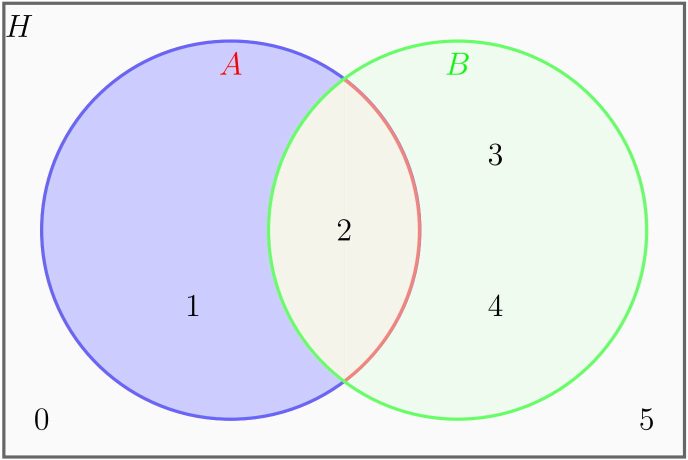
Ábrázoljuk Venn-diagrammal $A \cup B$, $\overline{A \cup B}$, $A \cap B$ és $A \setminus B$ halmazokat!



Halmazok - Példa

Legyen $A = \{1, 2\}$ és $B = \{2, 3, 4\}$ és $H = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ az alaphalmaz.

Ábrázoljuk Venn-diagrammal $A \cup B$, $\overline{A \cup B}$, $A \cap B$ és $A \setminus B$ halmazokat!



Halmazok

Nevezetes számhalmazok:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \ldots\}$ – természetes számok $\quad$ $(0$ is benne van!)

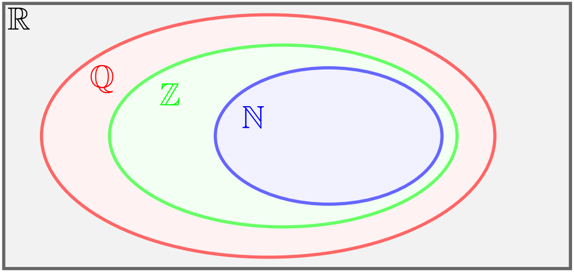
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2 \ldots\}$ – egész számok,

$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2 \ldots\}$ – pozitív egész számok,

$\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ – racionális számok,

$\mathbb{R}$: teljes számegyenes – valós számok

Számhalmazok Venn-diagrammja:



Halmazok

Nevezetes számhalmazok:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2\ldots\}$ – természetes számok $\quad$ (0 is benne van!)

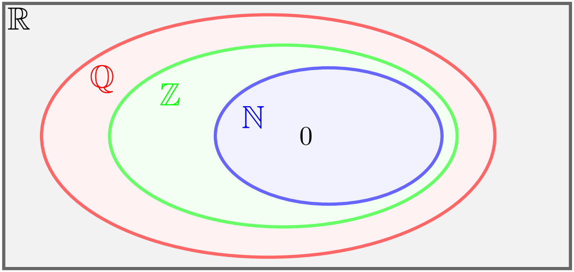
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2\ldots\}$ – egész számok,

$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2\ldots\}$ – pozitív egész számok,

$\mathbb{Q} = \{p/q \,|\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ – racionális számok,

$\mathbb{R}$: teljes számegyenes – valós számok

Számhalmazok Venn-diagrammja:



Halmazok

Nevezetes számhalmazok:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \ldots\}$ – természetes számok $\quad$ (0 is benne van!)

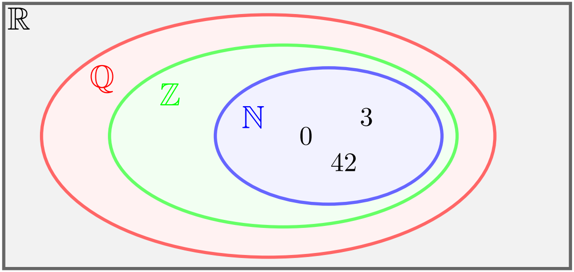
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2 \ldots\}$ – egész számok,

$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2 \ldots\}$ – pozitív egész számok,

$\mathbb{Q} = \{p/q \,|\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ – racionális számok,

$\mathbb{R}$: teljes számegyenes – valós számok

Számhalmazok Venn-diagrammja:



Halmazok

Nevezetes számhalmazok:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2\ldots\}$ – természetes számok (0 is benne van!)

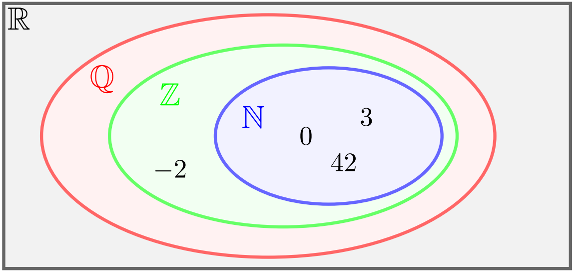
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2\ldots\}$ – egész számok,

$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2\ldots\}$ – pozitív egész számok,

$\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ – racionális számok,

$\mathbb{R}$: teljes számegyenes – valós számok

Számhalmazok Venn-diagrammja:



Halmazok

Nevezetes számhalmazok:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \dots\}$ – természetes számok $\quad$ (0 is benne van!)

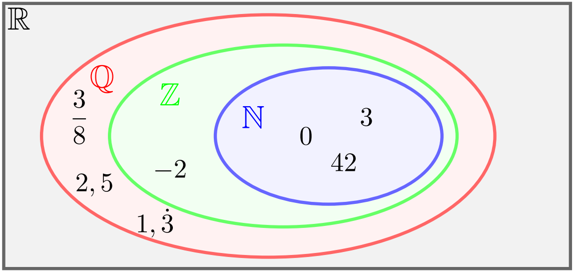
$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2 \dots\}$ – egész számok,

$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2 \dots\}$ – pozitív egész számok,

$\mathbb{Q} = \{p/q \,|\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ – racionális számok,

$\mathbb{R}$: teljes számegyenes – valós számok

Számhalmazok Venn-diagrammja:



Halmazok

Nevezetes számhalmazok:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \ldots\}$ – természetes számok $\quad$ (0 is benne van!)

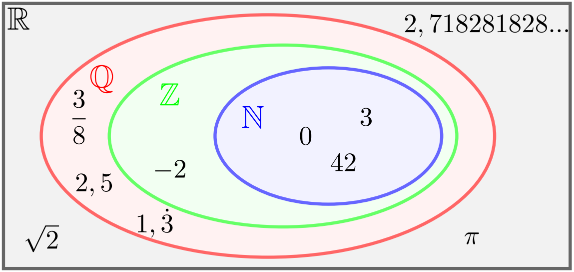
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2 \ldots\}$ – egész számok,

$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2 \ldots\}$ – pozitív egész számok,

$\mathbb{Q} = \{p/q \,|\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ – racionális számok,

$\mathbb{R}$: teljes számegyenes – valós számok

Számhalmazok Venn-diagrammja:

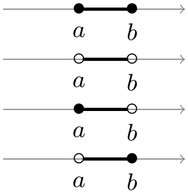


Intervallumok

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$ **zárt** intervallum

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ **nyílt** intervallum

$\left.\begin{array}{l} [a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\} \\ (a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\} \end{array}\right\}$ félig nyílt/zárt



Egy $[?(a,b)?]$ **intervallum hossza** a végpontok távolsága $d(a,b) := |b-a|$.

Ha a és/vagy $b = \pm\infty$, akkor ott csak nyílt lehet az intervallum:

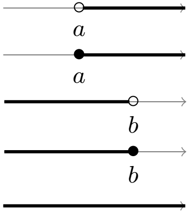
$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ nyílt intervallum

$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\}$ zárt intervallum

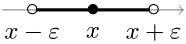
$(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ nyílt intervallum

$(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$ zárt intervallum

$(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$ valós számok



x valós szám $\varepsilon > 0$ sugarú környezete: $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$



Egy gyökös egyenlet megoldása

Egy x ismeretlenre felírt egyenlet megoldása azt jelenti, hogy keressük az alap számhalmaz azon elemeit, melyekre az egyenletet teljesül.

Példa. Oldjuk meg az $x+1=\sqrt{7+x}$ egyenletet a valós számok halmazán!

Egy gyökös egyenlet megoldása

Egy x ismeretlenre felírt egyenlet megoldása azt jelenti, hogy keressük az alap számhalmaz azon elemeit, melyekre az egyenletet teljesül.

Példa. Oldjuk meg az $x+1=\sqrt{7+x}$ egyenletet a valós számok halmazán!

$$\begin{aligned}
x+1 &= \sqrt{7+x} \quad (x \geq -7) \\
&\Downarrow \quad \text{négyzetre emelés} \\
(x+1)^2 &= 7+x \\
&\Updownarrow \quad \text{kifejtés} \\
x^2+2x+1 &= 7+x \\
&\Updownarrow \quad \text{átrendezés} \\
x^2+x-6 &= 0
\end{aligned}$$

Másodfokú megoldóképlet: $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot(-6)}}{2}=\dfrac{-1\pm 5}{2}=2,-3.$

Visszahelyettesítve $x_1=2$ megoldás: $2+1=3=\sqrt{7+2}$,

míg $x_2=-3$ nem megoldás, $-3+1=-2$, de $\sqrt{7-3}=2$ (hamis gyök!).

Egy egyenlőtlenség megoldása

Egy x ismeretlenre felírt egyenlőtlenség megoldása azt jelenti, hogy keressük az alap számhalmaz azon részeit (rendszerint intervallumokat vagy azok unióját), melyekre az egyenlőtlenség teljesül.

Példa. Oldjuk meg a $|2x+3| \geq 5$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

Egy egyenlőtlenség megoldása

Egy x ismeretlenre felírt egyenlőtlenség megoldása azt jelenti, hogy keressük az alap számhalmaz azon részeit (rendszerint intervallumokat vagy azok unióját), melyekre az egyenlőtlenség teljesül.

Példa. Oldjuk meg a $|2x+3| \geq 5$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

A $|2x+3| \geq 5$ egyenlőtlenség pontosan azt jelenti, hogy

$$\begin{array}{ccc} 2x+3 \leq -5 & \text{vagy} & 2x+3 \geq 5 \\ 2x \leq -8 & \text{vagy} & 2x \geq 2 \\ x \leq -4 & \text{vagy} & x \geq 1 \end{array}$$

Tehát a megoldáshalmaz a $(-\infty, -4] \cup [1, \infty)$ intervallumok uniója.

Állítások szerkezete

Alap kijelentésekből képzünk állításokat a "nem", "és", "vagy", "ha... akkor", "akkor és csak akkor" logikai kapcsolatok segítségével.

Fontos jelölések:

$\forall$	-	minden
$\exists$ / $\nexists$	-	létezik/nem létezik
$\neg$	-	nem
$\wedge$ / $\vee$	-	és/vagy
$A \Longrightarrow B$	-	ha A, akkor B
$A \Longleftrightarrow B$	-	A akkor és csak akkor B
$:=$	-	definiáló egyenlőség (a bal oldalt a jobb oldallal egyenlőként értelmezzük)

Példa. Halmazok különbségének definíciója logikai jelekkel leírva:

$$x \in A \setminus B \Longleftrightarrow (x \in A) \wedge \neg(x \in B)$$

vagy

$$A \setminus B := \{x \in A | \, x \notin B\}$$

Bizonyítási módszerek

A **direkt** bizonyítási eljárás során a már korábban bizonyított vagy axiómaként elfogadott megállapításokból kiindulva helyes logikai következtetésekkel igazoljuk az állításunkat.

Az **indirekt** bizonyítás olyan eljárás, melynek során feltesszük, hogy állításunk nem igaz, és ebből kiindulva helyes logikai következtetéseket levonva ellentmondáshoz jutunk. Így igazoljuk, hogy a kiindulási feltevés téves volt, azaz a bizonyítandó állítás helyes.

Példa (indirekt bizonyítás).

Állítás: végtelen sok prímszám létezik.

Indirekt feltevés: véges sok prím létezik, pontosan k darab $p_1, p_2, \ldots, p_k$.

Ekkor tekintsük a $q = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k + 1$ számot. Ez nem lehet prím, mert az ellentmondana a feltevésnek. Ekkor viszont létezik osztója, ami nem $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Ez szintén ellentmond a feltevésünknek, hiszen akkor lenne olyan prímosztója is, mely nincs az összes prím között. Így a feltevésünk hamis volt, tehát az eredeti állítás igaz.

Bizonyítási módszerek

A **teljes indukció** bizonyítási módszerét a természetes számok közül végtelen sokra kimondott állítások igazolására használjuk.

Az érvelésünk menete a következő:

1. Igazoljuk $n = 0$, vagy 1 stb. esetben (megfelelően kicsi n-re) az állítást,
2. tegyük fel, hogy igaz $n = N$ rögzített számra (indukciós feltevés) igaz az állítás,
3. igazoljuk a rákövetkező $n = N + 1$-re is,

így az adott állítást beláttuk minden n-re, mely nagyobb vagy egyenlő az 1. pontban igazolt esetnél.

Bizonyítási módszerek

Példa (teljes indukció).
Bizonyítsuk be teljes indukcióval minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra, hogy

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ha $n = 1$

$$1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$$

Tegyük fel $n = N$-re igaz, azaz

$$\sum_{k=1}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2} \qquad \text{(indukciós feltétel).}$$

Vizsgáljuk $n = N + 1$-re

$$\sum_{k=1}^{N+1} k = \sum_{k=1}^{N} k + (N+1) \underset{\text{(ind.felt.)}}{=}$$

$$= \frac{N(N+1)}{2} + (N+1) = \frac{N(N+1) + 2(N+1)}{2} = \frac{(N+1)(N+2)}{2}.$$