Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

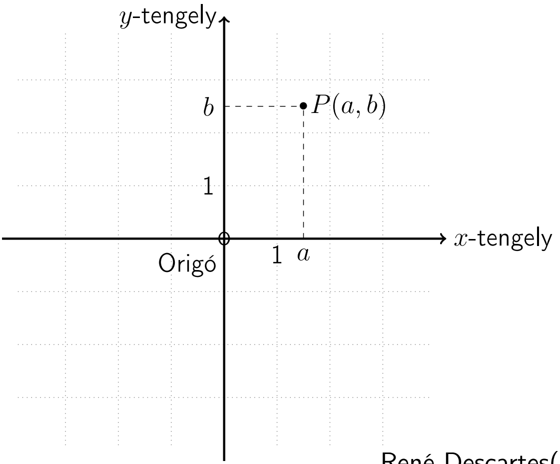
2023. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

2. előadás:
Egyenesek, körök, parabolák
függvényábrázolás és
függvénytranszformációk (ismétlés)
polinomok

Derékszögű koordináta-rendszer: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Két egymásra merőleges valós számegyenes segítségével, melyek a 0-ban találkoznak (**origó**) a sík pontjait rendezett valós számpároknak feleltejük meg.



René Descartes(1596-1650)

Egyenesek egyenlete

Írjuk fel a $P(x_p, y_p)$ és a $Q(x_q, y_q)$ ponton átmenő egyenes egyenletét! Azaz azt az egyenlet, melynek megoldáshalmazát ábrázolva a koordinátarendszerben pontosan a PQ egyenesén fekvő pontok halmazát kapjuk.

Az egyenes **meredeksége**: $y_q - y_p$ egységet emelkedünk, míg $x_q - x_p$ egységet megyünk jobbra, e kettő hányadosa a meredekség:

$$m = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p}, \quad \text{h}a \quad x_p \neq x_q.$$

Az **egyenes egyenlete** általánosan

$$y - y_p = m(x - x_p),$$

melyet a $P(x_p, y_p)$ és a $Q(x_q, y_q)$ pontok koordinátapárjai is kielégítenek. (P és Q illeszkednek az egyenesre.)

Ha $x_p = x_q$, akkor P és Q, valamint minden egyenesre eső pont első koordinátája azonos, így $x = x_p (= x_q)$ egyenlet írja le a megfelelő függőleges egyenes pontjait.

Egyenesek egyenlete

Példa. Írjuk fel a $P(5,1)$ és a $Q(2,3)$ ponton átmenő egyenes egyenletét.

Egyenesek egyenlete

Példa. Írjuk fel a $P(5,1)$ és a $Q(2,3)$ ponton átmenő egyenes egyenletét.

$x_p = 5$, $y_p = 1$, $x_q = 2$, $y_q = 3$.

A meredekség: $m = \dfrac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \dfrac{3-1}{2-5} = -\dfrac{2}{3}$.

Az egyenes egyenlete: $y - y_p = m(x - x_p)$, azaz itt

$$y - 1 = -\frac{2}{3}(x-5)$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}.$$

Egyenesek egyenlete

Példa. Írjuk fel a $P(5,1)$ és a $Q(2,3)$ ponton átmenő egyenes egyenletét.

$x_p = 5,\ y_p = 1\,, x_q = 2,\ y_q = 3.$

A meredekség: $m = \dfrac{y_q - y_p}{x_q - x_p} = \dfrac{3-1}{2-5} = -\dfrac{2}{3}.$

Az egyenes egyenlete: $y - y_p = m(x - x_p)$, azaz itt

$$y - 1 = -\frac{2}{3}(x-5)$$
$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}.$$

Hogyan jellemezhetőek az egyenes alatti és feletti pontok?

Egyenes alatti pontok $A(x_a, y_a)$: $y_a < -\dfrac{2}{3}x_a + \dfrac{13}{3} = y$,

az (x_a, y) pont az egyenes egy pontja.

Egyenes feletti pontok $F(x_f, y_f)$: $y_f > -\dfrac{2}{3}x_f + \dfrac{13}{3}.$

Kör egyenlete

Egy $P(x, y)$ pont távolsága az origótól $\sqrt{x^2 + y^2}$. Így az origó középpontú, r sugarú kör egyenlete:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Ha (a, b) a kör középpontja: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Kör egyenlete

Egy $P(x,y)$ pont távolsága az origótól $\sqrt{x^2+y^2}$. Így az origó középpontú, r sugarú kör egyenlete:

$$x^2+y^2=r^2.$$

Ha (a,b) a kör középpontja: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

Példa. Az $(2,-1)$ középpontú, 3 sugarú kör egyenlete:

Kör egyenlete

Egy $P(x, y)$ pont távolsága az origótól $\sqrt{x^2 + y^2}$. Így az origó középpontú, r sugarú kör egyenlete:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Ha (a, b) a kör középpontja: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Példa. Az $(2, -1)$ középpontú, 3 sugarú kör egyenlete:

$$\begin{aligned}(x-2)^2 + (y+1)^2 &= 3^2 \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 &= 9 \\ x^2 - 4x + y^2 + 2y - 4 &= 0\end{aligned}$$

Ekkor az $x^2 - 4x + y^2 + 2y - 4 < 0$ egyenlőtlenség megoldási a körlap **belső** pontjainak halmaza, $x^2 - 4x + y^2 + 2y - 4 = 0$ a **körvonal** pontjainak halmaza, $x^2 - 4x + y^2 + 2y - 4 > 0$ a **körön kívül eső pontok** halmaza.

Kör egyenlete

Egy $P(x,y)$ pont távolsága az origótól $\sqrt{x^2+y^2}$. Így az origó középpontú, r sugarú kör egyenlete:

$$x^2+y^2=r^2.$$

Ha (a,b) a kör középpontja: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

Példa. Az $(2,-1)$ középpontú, 3 sugarú kör egyenlete:

$$\begin{aligned}(x-2)^2+(y+1)^2&=3^2\\ x^2-4x+4+y^2+2y+1&=9\\ x^2-4x+y^2+2y-4&=0\end{aligned}$$

Ekkor az $x^2-4x+y^2+2y-4<0$ egyenlőtlenség megoldási a körlap **belső** pontjainak halmaza, $x^2-4x+y^2+2y-4=0$ a **körvonal** pontjainak halmaza, $x^2-4x+y^2+2y-4>0$ a **körön kívül eső pontok** halmaza.

Példa. Milyen alakzat az $x^2-6x+y^2-4y-3=0$ egyenletet kielégítő pontok halmaza?

Kör egyenlete

Egy $P(x, y)$ pont távolsága az origótól $\sqrt{x^2 + y^2}$. Így az origó középpontú, r sugarú kör egyenlete:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Ha (a, b) a kör középpontja: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

Példa. Az $(2, -1)$ középpontú, 3 sugarú kör egyenlete:

$$\begin{aligned} (x-2)^2 + (y+1)^2 &= 3^2 \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 &= 9 \\ x^2 - 4x + y^2 + 2y - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Ekkor az $x^2 - 4x + y^2 + 2y - 4 < 0$ egyenlőtlenség megoldási a körlap **belső** pontjainak halmaza, $x^2 - 4x + y^2 + 2y - 4 = 0$ a **körvonal** pontjainak halmaza, $x^2 - 4x + y^2 + 2y - 4 > 0$ a **körön kívül eső pontok** halmaza.

Példa. Milyen alakzat az $x^2 - 6x + y^2 - 4y - 3 = 0$ egyenletet kielégítő pontok halmaza?

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + y^2 - 4y - 3 &= 0 \\ (x-3)^2 - 9 + (y-2)^2 - 4 - 3 &= 0 \\ (x-3)^2 + (y-2)^2 &= 16 \end{aligned}$$

Ez egy $(3, 2)$ középpontú, 4 sugarú kör.

Parabolák

A síkon az $y = ax^2 + bx + c$ egyenletet kielégítő pontok mértani helyét **parabolának** nevezzük.

A fenti egyenlettel adott parabola **szimmetriatengelye** az $x = \dfrac{-b}{2a}$ függőleges egyenes.

A **csúcspontja** pedig a szimmetriatengely és a görbe metszéspontja (erre a pontra teljesül a parabola egyenlete és a tengelyegyenes egyenlete is.)

Parabolák

A síkon az $y = ax^2 + bx + c$ egyenletet kielégítő pontok mértani helyét **parabolának** nevezzük.

A fenti egyenlettel adott parabola **szimmetriatengelye** az $x = \dfrac{-b}{2a}$ függőleges egyenes.

A **csúcspontja** pedig a szimmetriatengely és a görbe metszéspontja (erre a pontra teljesül a parabola egyenlete és a tengelyegyenes egyenlete is.)

Példa. Milyen alakzat az $y + x^2 - 4x + 3 = 0$ egyenletet kielégítő pontok halmaza?

Parabolák

A síkon az $y = ax^2 + bx + c$ egyenletet kielégítő pontok mértani helyét **parabolának** nevezzük.

A fenti egyenlettel adott parabola **szimmetriatengelye** az $x = \dfrac{-b}{2a}$ függőleges egyenes.

A **csúcspontja** pedig a szimmetriatengely és a görbe metszéspontja (erre a pontra teljesül a parabola egyenlete és a tengelyegyenes egyenlete is.)

Példa. Milyen alakzat az $y + x^2 - 4x + 3 = 0$ egyenletet kielégítő pontok halmaza?

$$y = -1 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 3$$

Mivel $a = -1$, $b = 4$ és $c = -3$,

$x = -4/(2 \cdot (-1)) = 2$ függőleges szimmetriatengelyű,

$y = (-1) \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 3 = 1$, tehát $(2, 1)$ csúcspontú parabola.

Az x-tengelyt az $y = 0$ koordinátájú pontokban metszi: $-x^2 + 4x - 3 = 0$ megoldásai $x_{1,2} = 1, 3$, ezért az $(1, 0)$ és $(3, 0)$ pontokon megy át a görbe. Ekkor az $y < -x^2 + 4x - 3$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza a parabola alatti, még $y > -x^2 + 4x - 3$ a parabola feletti pontok halmaza.

Egy **egyváltozós valós függvény** $f : D_f \longrightarrow R_f$ a D_f és R_f valós számhalmazok között létesít megfeleltetést úgy, hogy minden $x \in D_f$ elemhez egyértelműen rendel $y = f(x) \in R_f$ elemet.

Ha $f : x \mapsto f(x)$ valós függvény, akkor a $\mathcal{G} = \{(x, f(x)) \,|\, x \in D_f\}$ valós számpárok halmaza a függvény **grafikonja** a koordináta-rendszerben.

Ha az (x, y) pont **illeszkedik** egy f valós függvény grafikonjára, akkor az adott pont koordinátái kielégítik az $y = f(x)$ egyenletet.

Függvényábrázolás

Példa. Ábrázoljuk az $f(x) = 2(x+3)^3 - 1$ függvény grafikonját.

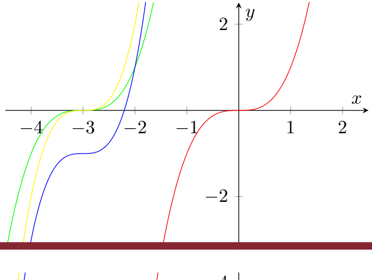
A $g(x) = (x+3)^3$ függvény grafikonját a x^3 függvény grafikonjának 3 egységgel való balra tolásával kapjuk.

Általánosan: ha az x-hez hozzáadunk (levonunk) $a > 0$-t, akkor a grafikont a-val balra (jobbra) toljuk.

A $h(x) = 2(x+3)^3$ függvény grafikonját a $g(x)$ függvény grafikonjának függőleges "nyújtásával" kapjuk.

Végül az $f(x) = 2(x+3)^3 - 1$ függvény grafikonját a $h(x)$ függvény grafikonjának 1-gyel való lefelé tolásával kapjuk.

Általánosan: ha az $f(x)$-hez hozzáadunk (levonunk) $b > 0$-t, akkor a grafikont b-vel felfelé (lefelé) toljuk.



Polinomok

Azokat az egyváltozós kifejezéseket, melyeket a következő alakban írhatunk fel, **valós együtthatós polinomoknak** nevezzük:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,\, a_k \in \mathbb{R}$$

$p(x)$ polinom **fokszáma**: n jelölése: $\deg p = n$

a_n **főegyüttható**, a_k együtthatók, a_0 **konstans tag**

Speciális esetek:

$p(x) \equiv c$ **konstans polinom** ($\deg = 0$ feltéve, hogy $c \neq 0$)

$p(x) = ax + b$ **lineáris polinom** - egyenes ($\deg = 1$, feltéve $a \neq 0$.)

Polinomok

Polinom **nullhelye vagy gyöke:** az az x_0 szám, melyre $p(x_0) = 0$.

Bézout-tétel: Ha x_0 gyöke a $p(x)$ n-ed fokú polinomnak, akkor létezik egy $q(x)$ polinom, melyre $p(x) = (x - x_0) \cdot q(x)$. Azaz az $x - x_0$ elsőfokú polinom legalább egyszer kiemelhető $p(x)$-ből.

Egy polinom x_0 gyökének **multiplicitásán** azt a legnagyobb $k \in \mathbb{Z}^+$ kitevőt értjük, melyre $(x - x_0)^k$ kiemelhető a polinomból.

Egy $p(x)$ polinom **irreducibilis** a valós számok felett, ha minden $p(x) = q(x) \cdot r(x)$ valós polinomokból álló szorzatra bontása esetén valamelyik tényező konstans polinom.

Algebra alaptételének következménye: Minden valós együtthatós polinom előáll elsőfokú és negatív diszkriminánsú másodfokú polinomok szorzataként.

Polinomosztás

Az $f(x)$ és $g(x)$ polinomokhoz léteznek $q(x)$ és $r(x)$ polinomok úgy, hogy

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), \qquad \deg r < \deg g.$$

Elnevezés: $g(x)$ az osztó, $r(x)$ a maradék.

Példa. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 3$ és $g(x) = x - 2$ polinomok osztása

Polinomosztás

Az $f(x)$ és $g(x)$ polinomokhoz léteznek $q(x)$ és $r(x)$ polinomok úgy, hogy

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), \qquad \deg r < \deg g.$$

Elnevezés: $g(x)$ az osztó, $r(x)$ a maradék.

Példa. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 3$ és $g(x) = x - 2$ polinomok osztása

$$x^3 \quad + \quad 3x^2 \quad - \quad 5x \quad + \quad 3 \quad : (x-2) = x^2$$

Polinomosztás

Az $f(x)$ és $g(x)$ polinomokhoz léteznek $q(x)$ és $r(x)$ polinomok úgy, hogy

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), \qquad \deg r < \deg g.$$

Elnevezés: $g(x)$ az osztó, $r(x)$ a maradék.

Példa. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 3$ és $g(x) = x - 2$ polinomok osztása

$$\begin{array}{ccccccccl}
x^3 & + & 3x^2 & - & 5x & + & 3 & : (x-2) = x^2 \\
x^3 & - & 2x^2 & & & & & \\
\hline
\end{array}$$

Polinomosztás

Az $f(x)$ és $g(x)$ polinomokhoz léteznek $q(x)$ és $r(x)$ polinomok úgy, hogy

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), \qquad \deg r < \deg g.$$

Elnevezés: $g(x)$ az osztó, $r(x)$ a maradék.

Példa. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 3$ és $g(x) = x - 2$ polinomok osztása

$$\begin{array}{cccccccl}
x^3 & + & 3x^2 & - & 5x & + & 3 & :(x-2) = x^2 + 5x \\
x^3 & - & 2x^2 & & & & & \\
\hline
 & & 5x^2 & - & 5x & + & 3 &
\end{array}$$

Polinomosztás

Az $f(x)$ és $g(x)$ polinomokhoz léteznek $q(x)$ és $r(x)$ polinomok úgy, hogy

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), \qquad \deg r < \deg g.$$

Elnevezés: $g(x)$ az osztó, $r(x)$ a maradék.

Példa. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 3$ és $g(x) = x - 2$ polinomok osztása

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x^3 & + & 3x^2 & - & 5x & + & 3 \quad : (x-2) = x^2 + 5x \\
x^3 & - & 2x^2 & & & & \\
\hline
 & & 5x^2 & - & 5x & + & 3 \\
 & & 5x^2 & - & 10x & & \\
\cline{3-7}
\end{array}$$

Polinomosztás

Az $f(x)$ és $g(x)$ polinomokhoz léteznek $q(x)$ és $r(x)$ polinomok úgy, hogy

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), \qquad \deg r < \deg g.$$

Elnevezés: $g(x)$ az osztó, $r(x)$ a maradék.

Példa. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 3$ és $g(x) = x - 2$ polinomok osztása

$$\begin{array}{ccccccccl}
x^3 & + & 3x^2 & - & 5x & + & 3 & : (x-2) = x^2 + 5x + 5 \\
x^3 & - & 2x^2 & & & & & \\
\hline
 & & 5x^2 & - & 5x & + & 3 & \\
 & & 5x^2 & - & 10x & & & \\
\cline{3-7}
 & & & & 5x & + & 3 &
\end{array}$$

Polinomosztás

Az $f(x)$ és $g(x)$ polinomokhoz léteznek $q(x)$ és $r(x)$ polinomok úgy, hogy

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), \qquad \deg r < \deg g.$$

Elnevezés: $g(x)$ az osztó, $r(x)$ a maradék.

Példa. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 3$ és $g(x) = x - 2$ polinomok osztása

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x^3 & + & 3x^2 & - & 5x & + & 3 \quad : (x-2) = x^2+5x+5 \\
x^3 & - & 2x^2 & & & & \\
\hline
 & & 5x^2 & - & 5x & + & 3 \\
 & & 5x^2 & - & 10x & & \\
\cline{3-7}
 & & & & 5x & + & 3 \\
 & & & & 5x & - & 10 \\
\cline{5-7}
\end{array}$$

Polinomosztás

Az $f(x)$ és $g(x)$ polinomokhoz léteznek $q(x)$ és $r(x)$ polinomok úgy, hogy

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), \qquad \deg r < \deg g.$$

Elnevezés: $g(x)$ az osztó, $r(x)$ a maradék.

Példa. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 3$ és $g(x) = x - 2$ polinomok osztása

$$\begin{array}{rcrcrcr l}
x^3 & + & 3x^2 & - & 5x & + & 3 & : (x-2) = x^2 + 5x + 5 \\
x^3 & - & 2x^2 & & & & & \\
\hline
 & & 5x^2 & - & 5x & + & 3 & \\
 & & 5x^2 & - & 10x & & & \\
\hline
 & & & & 5x & + & 3 & \\
 & & & & 5x & - & 10 & \\
\hline
 & & & & & & 13 &
\end{array}$$

Polinomosztás

Az $f(x)$ és $g(x)$ polinomokhoz léteznek $q(x)$ és $r(x)$ polinomok úgy, hogy

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), \qquad \deg r < \deg g.$$

Elnevezés: $g(x)$ az osztó, $r(x)$ a maradék.

Példa. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 3$ és $g(x) = x - 2$ polinomok osztása

$$\begin{array}{rcrcrcr l}
x^3 & + & 3x^2 & - & 5x & + & 3 & : (x-2) = x^2 + 5x + 5 \\
x^3 & - & 2x^2 & & & & & \\
\hline
 & & 5x^2 & - & 5x & + & 3 & \\
 & & 5x^2 & - & 10x & & & \\
\cline{3-7}
 & & & & 5x & + & 3 & \\
 & & & & 5x & - & 10 & \\
\cline{5-7}
 & & & & & & 13 &
\end{array}$$

Tehát a maradék 13, és $x^3 + 3x^2 - 5x + 3 = (x^2 + 5x + 5)(x - 2) + 13$.

Gyökök multiplicitása

Egy polinom x_0 gyökének **multiplicitásán** azt a legnagyobb $k \in \mathbb{Z}^+$ kitevőt értjük, melyre $(x - x_0)^k$ kiemelhető a polinomból.

Példa: A $p(x) = x^3 + 2x^2 + x$ polinomnak a (-1) hányszoros gyöke?

$$x^3 + 2x^2 + x = (x+1)(x^2+x) = (x+1)(x+1)x = (x+1)^2 x,$$

azaz kétszeres gyök $(k = 2)$. További gyöke a polinomnak a 0.

Gyöktényezős alak:
Ha a $p(x)$ n-edfokú polinom főegyütthatója a_n és gyökei $x_1, x_2, \dots, x_k$, melyek multiplicitása $m_1, m_2, \dots, m_k$, és ezek összege n, akkor

$$p(x) = a_n (x - x_1)^{m_1} (x - x_2)^{m_2} \dots (x - x_k)^{m_k}$$

Polinomok egész gyökei

Ha az $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ **egész** együtthatós polinom ($a_n, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$), és p **egész** gyöke a polinomnak, akkor teljesül, hogy p osztója a_0-nak.

Bizonyítás. Ha $x = p \in \mathbb{Z}$ gyök, akkor

$$\underbrace{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p}_{\text{osztható } p\text{-vel}} + a_0 = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{így } a_0 \text{ osztható } p\text{-vel.}$$

Példa: Keressük meg az $x^3 + 6x^2 + 10x + 3$ polinom egész gyökeit!

Lehetséges gyökök a 3 osztói: $-3, -1, 1, 3$.
Ezeket behelyettesítgetve $x_1 = -3$ gyök (többi nem).
Ekkor az $(x+3)$-at kiemeljük:

$$x^3 + 6x^2 + 10x + 3 = (x+3)(x^2 + 3x + 1).$$

Végül az $x^2 + 3x + 1 = 0$ másodfokú egyenletet megoldjuk:

$$x_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Tehát a gyökök: $-3, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$.