Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2023. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

3. elődás:
Függvények alaptulajdonságai
nevezetes függvények

Függvények

Egy **egyváltozós valós függvény** $f : D_f \longrightarrow R_f$ a D_f és R_f valós számhalmazok között létesít megfeleltetést úgy, hogy minden $x \in D_f$ elemhez **egyértelműen** rendel $y = f(x) \in R_f$ elemet.

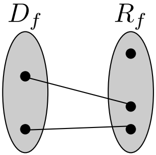
Jelölés: D_f - értelmezési tartomány, R_f - értékkészlet

$$f : x \mapsto f(x).$$

A függvények hozzárendelési típusai lehetnek:

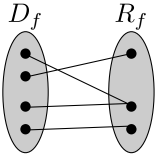
injektív

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$



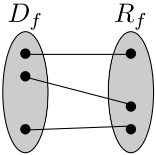
szürjektív

$$\forall y_1 \exists x_1 \Rightarrow y_1 = f(x_1)$$



bijektív(egy-egy értelmű)

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$
$$\wedge \forall y_1 \exists x_1 \Rightarrow y_1 = f(x_1)$$

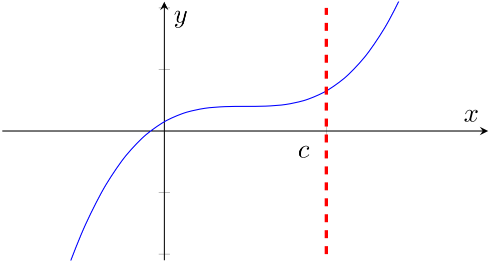


Függvénygrafikon

Ha $f : x \mapsto f(x)$ valós függvény, akkor a $\mathcal{G} = \{(x, f(x)) \,|\, x \in D_f\}$ valós számpárok halmaza a függvény **grafikonjának** pontjai a koordinátarendszerben.

Ha az (x, y) pont **illeszkedik** egy f valós függvény grafikonjára, akkor az adott pont koordinátái kielégítik az $y = f(x)$ egyenletet.

Mivel a függvényhozzárendelésben minden x értékhez egyértelműen rendelünk $y = f(x)$ értéket, ezért minden függőleges egyenes $(x = c)$ legfeljebb egyszer metszheti át a függvény grafikonját (**vertikális teszt**).



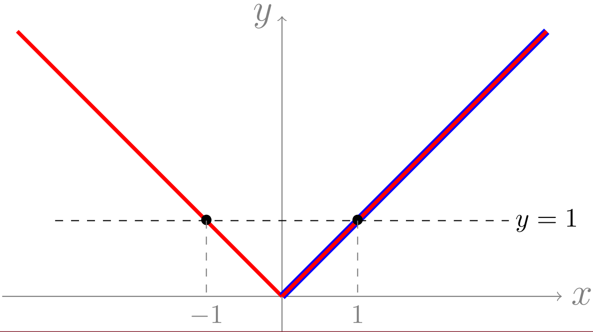
Abszolútérték függvény

$$f : x \mapsto |x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad D_f : (-\infty, \infty)$$

szürjektív, de nem injektív, például $|1| = |-1| = 1$, és $R_f = [0, \infty)$.
Ugyanakkor a

$$g : x \mapsto |x|, \qquad x \in \mathbb{R}^+, \quad D_f : (0, \infty)$$

már injektív is, tehát g már bijektív.



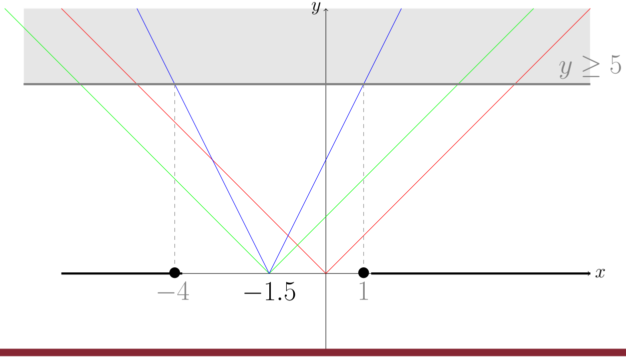
Abszolútérték függvény

Egy korábbi példa. Oldjuk meg a $|2x+3| \geq 5$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

Abszolútérték függvény

Egy korábbi példa. Oldjuk meg a $|2x+3| \geq 5$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

Függvénytranszformációkkal ábrázoljuk az $f(x) = |2x+3| = |2(x+3/2)|$ függvényt. Az $|x|$ balra tolásával kapjuk az $|x+3/2|$ grafikonját, ennek x-tengely irányú összenyomásával kapjuk $|2x+3|$ grafikonját. A grafikon $y \geq 5$ vízszintes egyenes feletti területre eső része (megoldva a $2x+3 = \pm 5$ egyenleteket) a $(-\infty, -4] \cup [1, \infty)$ intervallum felett helyezkedik el.



Függvények értelmezési tartománya

Valós függvények **természetes értelmezési tartományán** azt a legbővebb valós számhalmazt értjük, melynek elemeire kiszámítható a függvényérték.

Néhány egyszerűbb függvény értelmezési tartománya és értékkészlete:

$f(x)$	D_f	R_f
$a \cdot x + b$	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \infty)$
x^2	$(-\infty, \infty)$	$[0, \infty)$
$1/x$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$\sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$

Függvénykompozíció

Ha $g : A \to B'$ és $f : B \to C$, ahol $B' \subseteq B$, akkor f és g ebben a sorrendben vett **kompozíciója**

$$f \circ g : A \to C$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

A f a **külső**, míg g a **belső függvény**.

Ha $f : D_f \to \mathbb{R}$ és $g : D_g \to \mathbb{R}$ $(D_f, D_g \subseteq \mathbb{R})$, akkor az $f \circ g$ összetett függvény értelmezési tartománya:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in D_g \text{ és } g(x) \in D_f\}.$$

Példa: $f(x) = \sqrt{x}$ és $g(x) = 2x + 1$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x+1) = \sqrt{2x+1} \qquad 2x + 1 \geq 0,\ (x \geq -1/2)$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x}\right) = 2\sqrt{x} + 1 \qquad x \geq 0$$

Függvények invertálása

Az $f^{-1} : R_f \to D_f$ függvény az $f : x \mapsto f(x), \quad D_f \to R_f$ injektív függvény **inverze**, ha bármely $y \in R_f$ elemhez azt az x-et rendeli hozzá, melyre $f(x) = y$.

Az f^{-1} inverz függvény értelmezési tartománya az f függvény értékkészlete.

A definícióból az következik, hogy $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$.

Ha f függvény grafikonját tengelyesen tükrözzük az $y = x$ egyenesre, akkor pontosan f^{-1} grafikonját kapjuk.

Egyszerűbb példák:

$f(x) = |x|$ nem injektív, így nincs inverze.

$f(x) = x$ inverze önmaga: $f^{-1}(x) = x$.

$f(x) = ax + b$ inverze $f^{-1}(x) = \dfrac{x-b}{a}$, ha $a \neq 0$ (köv. példa).

$f(x) = x^2$ nem injektív, de ha csak a $[0, +\infty)$ intervallumon értelmezzük, akkor injektív, és az inverze: $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Függvények invertálása

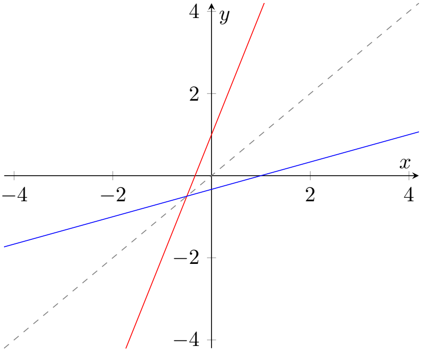
Példa. Az $f(x) = 3x + 1$ függvény inverze:

Függvények invertálása

Példa. Az $f(x) = 3x + 1$ függvény inverze:

$$\begin{aligned} f(x) &= y \\ 3x + 1 &= y \\ 3x &= y - 1 \\ x &= \frac{y-1}{3}, \end{aligned}$$

tehát $f^{-1}(y) = \dfrac{y-1}{3}$, azaz $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{3}$.



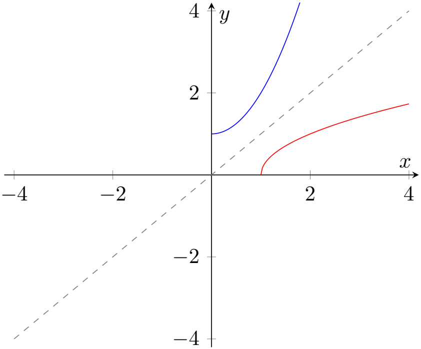
Függvények invertálása

Példa: A $g(x) = \sqrt{x-1},\ x \geq 1$ függvény inverze

Függvények invertálása

Példa: A $g(x) = \sqrt{x-1},\ x \geq 1$ függvény inverze

$$\begin{aligned} g(x) &= y \\ \sqrt{x-1} &= y \\ y^2 &= x-1 \\ y^2+1 &= x,\ x \geq 1 \rightarrow y \geq 0 \end{aligned}$$



tehát $g^{-1}(y) = y^2+1,\ y \geq 0$, azaz

$$g^{-1}(x) = x^2+1,\ x \geq 0$$

.

Monotonitás

Az f függvény egy $I = (a, b) \subseteq D_f$ intervallumon

- **monoton nő**, ha $\forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
- **szigorúan monoton nő**, ha $\forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- **monoton csökken**, ha $\forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.
- **szigorúan mon. csökken**, ha $\forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
- **monoton**, ha $f(x)$ az I-n monoton nő vagy monoton csökken.
- **szigorúan monoton**, ha $f(x)$ az I-n szigorúan monoton nő vagy szigorúan monoton csökken.

Példák:

$f(x) = x$ szigorúan monoton nő $\mathbb{R}$-en.

$g(x) = x^2$ szigorúan monoton csökken $(-\infty, 0]$-n, és szigorúan monoton nő $[0, +\infty)$-n, de $\mathbb{R}$-en nem monoton.

Ha egy függvény egyszerre monoton nő és monoton csökken egy intervallumon, akkor az az intervallumon konstans függvény.

Korlátosság

Az $f : I = [a, b] \subseteq D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény

- **alulról korlátos**, ha van olyan $k \in \mathbb{R}$, hogy $f(x) \geq k$ minden $x \in I$ esetén (k **alsó korlát**). $\rightsquigarrow$ **legnagyobb alsó korlát**
- **felülről korlátos**, ha van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy $f(x) \leq K$ minden $x \in I$ esetén (K **felső korlát**). $\rightsquigarrow$ **legkisebb felső korlát**
- **korlátos**, ha alulról és felülről korlátos, azaz van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy $|f(x)| \leq K$ minden $x \in I$ esetén.

Példák:

$f(x) = |x|$ alulról korlátos D_f-en, legnagyobb alsó korlát a 0, de felülről nem korlátos, így nem is korlátos.

$g(x) = \sin(x)$ alulról korlátos, legnagyobb alsó korlát -1, felülről korlátos, legkisebb felső korlát a 1, így korlátos is.

Periodikus függvények

Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény **periodikus (p szerint)**, ha létezik $p \neq 0$ úgy, hogy $x \in D_f$ esetén $x \pm p \in D_f$ és $f(x+p) = f(x)$.

Ha egy függvény p szerint periodikus, akkor $k \cdot p$ szerint is periodikus, ahol $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

A legkisebb pozitív számot, mely szerint f periodikus, f **periódusának** nevezzük (ha van).

Példák:

$\sin(x), \cos(x)$: 2π szerint periodikus.

$\mathrm{tg}(x)$: π szerint periodikus.

$\{x\}$: (törtrész) $= x - [x]$ (egészrész) függvény: 1 szerint periodikus

Egy példa, amikor nincs periódushossz, de a függvény periodikus: a Dirichlet-függvény

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \\ 1, & \text{ha } x \text{ racionális.} \end{cases}$$

Paritás

Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ $(D_f \subseteq \mathbb{R})$ függvény

- **páros**, ha $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$, és $f(-x) = f(x)$.
  A grafikon az y tengelyre tükrös.

- **páratlan**, ha $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$, és $f(-x) = -f(x)$.
  A grafikon az origóra tükrös.

Példák:

x^2, $|x|$, $\cos(x)$: páros

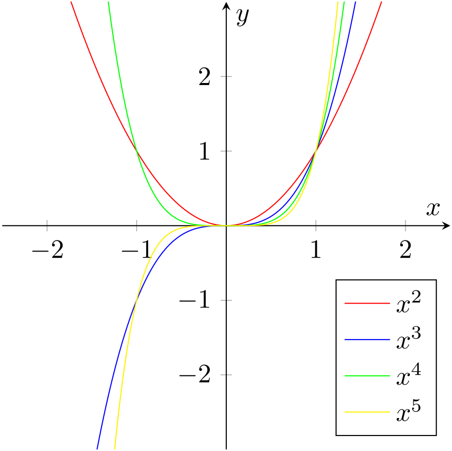
x, x^3, $\sin(x)$: páratlan

Páros függvények összege is páros, páratlan függvények összege is páratlan!

A paritás vizsgálatát csak akkor hajtjuk végre, ha az értelmezési tartomány az origóra szimmetrikusan helyezkedik el a számegyenesen.

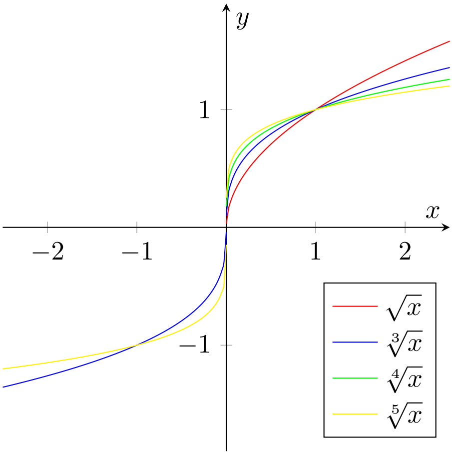
Hatványfüggvények

Az x^n függvény ($n \in \mathbb{Z}^+$) értelmezési tartománya $D_{x^n} = \mathbb{R}$ a teljes valós számok halmaza. Grafikonja páros n esetén parabolához hasonlít, páros függvény. Páratlan n esetén monoton növekvő a függvény, grafikonja $n \geq 3$ esetén az x^3 grafikonjához hasonlít, páratlan függvény.



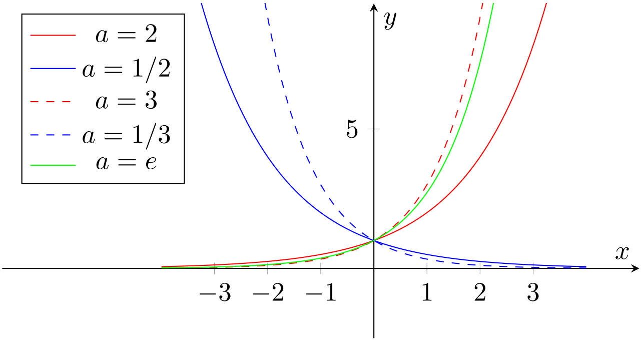
Gyökfüggvények

Az $\sqrt[n]{x}$ függvény páros n esetén csak a nemnegatív értékekre van értelmezve $D_{\sqrt[2n]{x}} = [0, \infty)$. Páratlan n esetén $D_{\sqrt[2n+1]{x}} = \mathbb{R}$, páratlan függvény. Minden $n \in \mathbb{Z}^+$-re a gyökfüggvények a teljes értelmezési tartományukon monoton növekedőek.



Exponenciális függvény

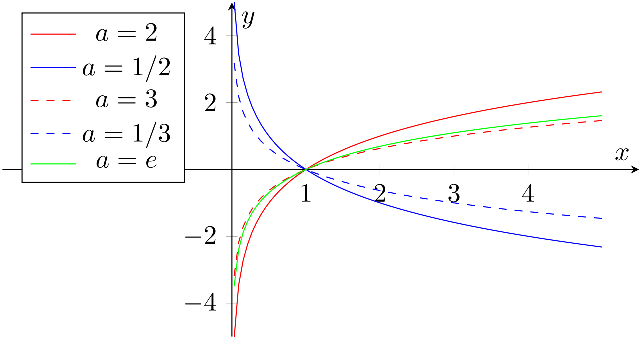
Az $f(x) = a^x$ függvényt exponenciális függvénynek nevezzük, ahol $a > 0$ és $a \neq 1$. Értelmezési tartománya $\mathbb{R}$, még értékkészlete $(0, \infty)$. $a > 1$ esetén monoton növő, még $a < 1$ esetén nomoton csökkenő a függvény.



Az $a = e = 2,718281828459\ldots$ esetén gyakran nevezzük a függvényt „az" exponenciális függvénynek (jelölés: e^x).

Logaritmusfüggvény

Az $f(x) = \log_a(x)$ függvényt "a"-alapú logaritmusfüggvénynek nevezzük, ahol $a > 0$ és $a \neq 1$. A logaritmusfüggvény az exponenciális függvény inverze. Ezért értelmezési tartománya a $(0, \infty)$, értékkészlete $\mathbb{R}$. $a > 1$ esetén monoton növő, még $a < 1$ esetén nomoton csökkenő a függvény.



Az $a = e = 2,718281828459\ldots$ esetén természetes alapú logaritmusfüggvénynek nevezzük (jelölés: $\ln(x)$).

Exponenciális és logaritmikus azonosságok

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^{x+y} = a^x a^y$$

$$a^{xy} = (a^x)^y$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$$

$$a^x b^x = (ab)^x$$

$$\log_a(1) = 0$$

$$\log_a(a) = 1$$

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x)$$

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

Trigonometrikus függvények

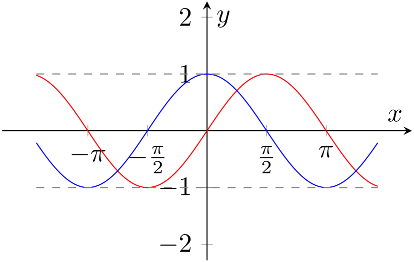
A $\sin(x)$, $\cos(x)$ függvények minden valós számon értelmezve vannak, periódikusak, $p = 2\pi$ a periódushosszuk.

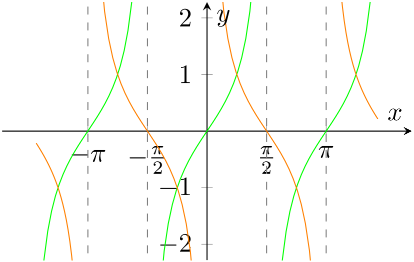
Korlátos függvények, alsó és felső korlátjaik: ± 1.

A $\mathbf{tg}(x)$, $\mathbf{ctg}(x)$ függvények periódikusak, $p = \pi$ a periódushosszuk.

$D_{tg} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, és minden periódusban monoton nő.

$D_{ctg} = (0, \pi) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, és minden periódusban monoton csökken.





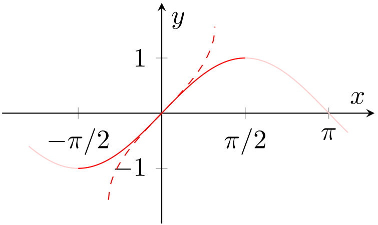
Sinus és Cosinus inverze

$\sin(x)$ nem injektív, de

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$

tartományon már igen, itt vehetjük az inverzét:

$$\arcsin(x) : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

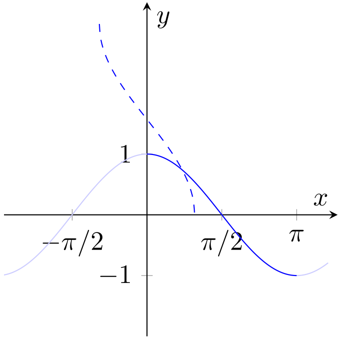


Hasolnlóan a $\cos(x)$,

$$[0, \pi] \to [-1, 1]$$

tartományon már bijektív, itt vehetjük az inverzét:

$$\arccos(x) : [-1, 1] \to [0, \pi]$$



Tangens, cotangens függvények inverze

A $\mathbf{tg}(x)$ függvényt a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$-re kell megszorítani, hogy injektív legyen.
Itt az inverze: $\mathbf{arctg}(x) : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Korlátos, $R_{arctg} = [-\pi/2, \pi/2]$.

A $\mathbf{ctg}(x)$ függvényt a $(0, \pi)$-re kell megszorítani, hogy injektív legyen.
Itt az inverze: $\mathbf{arcctg}(x) : \mathbb{R} \to (0, \pi)$. Korlátos, $R_{arcctg} = [0, \pi]$.