

Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2023. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia

belus@math.bme.hu

geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

**5. előadás:
Numerikus sorozatok:
Torlódási pont,
Véges, végtelen határérték fogalma,
Műveletek numerikus sorozatokkal**

Torlódási pont

Az $\{a_n\}$ sorozat **részsorozata** $\{b_k\} \subset \{a_n\}$ sorozat, ha létezik olyan monoton növekvő hozzárendelés $\forall k \in \mathbb{Z}^+$, hogy $k \mapsto n_k$, úgy hogy $b_k = a_{n_k}$.

Az $\{a_n\}$ sorozatnak T szám **torlódási pontja**, ha létezik $\{b_n\} \subset \{a_n\}$ részsorozata, melynek határértéke T .

Tétel. Konvergens sorozatnak csak egy torlódási pontja van, a határértéke.

azaz

Konvergens sorozatnak minden részsorozata is konvergens, és a részsorozatok határértéke megegyezik az eredeti sorozat határértékével.

Pl. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$, így $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0 \dots$ stb.

Tétel. (Bolzano-Weierstrass) Korlátos sorozatnak mindig van torlódási pontja.

Pl. $\{(-1)^n\}$ két torlódási pontja van ± 1 .

Műveletek konvergens sorozatokkal

Tétel. Korlátos sorozatokból tagonkénti összegéssel, kivonással vagy sorzással kapott sorozatok is korlátosak.

Tétel. Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ és $A, B \in \mathbb{R}$, akkor

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm b_n = A \pm B$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = A \cdot B$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda a_n = \lambda A$, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^k = A^k$, $k > 1$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{A}$, feltéve, hogy $a_n > 0$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, feltéve, hogy $b_n \neq 0$ és $B \neq 0$.

Műveletek konvergens sorozatokkal

Példák.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)-3}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \frac{3}{n+1} = \\ &2 - 3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 2 - 3 \cdot 0 = 2.\end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right)^2 = 2 \cdot 0 - 0^2 = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2n^4 + 3n^2 + 2}{7n^4 + 4n^3 + 6}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2 + \frac{3}{n^2} + \frac{2}{n^4}}{7 + \frac{4}{n} + \frac{6}{n^4}}} = \sqrt{\frac{2+0+0}{7+0+0}} = \sqrt{\frac{2}{7}}.$$

Tétel. (Rendőr/szendvics-elv) Ha $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ és $\{c_n\}$ sorozatok esetén,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = H$ és egy adott N küszöbindextől minden $n > N$ -re

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

teljesül, akkor a $\{b_n\}$ sorozat konvergens, és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = H$.

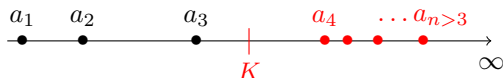
Példa. $b_n = \frac{\sin(n)}{n}$.

$$a_n = \frac{-1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n} = c_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \longrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0.$$

Végtelenbe tartás

Egy $\{a_n\}$ valós számsorozat **tart** a ∞ -be, ha bármely $K > 0$ esetén van olyan N_K küszöbindex, hogy ha $n > N_K$, akkor $a_n > K$.



Egy $\{a_n\}$ valós számsorozat **tart** a $-\infty$ -be, ha bármely $k < 0$ esetén van olyan N_k küszöbindex, hogy ha $n > N_k$, akkor $a_n < k$.

A $\pm\infty$ -be tartó sorozatok is divergensnek.

Példák.

- | | |
|---|---|
| $\{a_n\} = \{n\} = \{1, 2, 3, \dots\}$ | - monoton nő, de nincsen felső korlátja, ∞ -be tart. |
| $\{b_n\} = \{-n^2\} = \{-1, -4, -9, \dots\}$ | - csökken, alulról nem korlátos, $-\infty$ -be tart. |
| $\{c_n\} = \{(-1)^n \cdot n\} = \{-1, 2, -3, \dots\}$ | - oszcillál, nem korlátos, egyik "fele" a ∞ -be, másik a $-\infty$ -be tart. |

Műveletek ∞ -hez tartó sorozatokkal

Tétel. Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, akkor

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm b_n = \pm \infty$,

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \begin{cases} \infty, & \text{ha } A > 0, \\ -\infty, & \text{ha } A < 0, \\ ?, & \text{ha } A = 0, \end{cases} \quad (0 \cdot \infty)$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, feltéve, hogy $b_n \neq 0$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n + c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \cdot c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)^{c_n} = \infty$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = A^\infty = \begin{cases} \infty, & \text{ha } A > 1, \\ 0, & \text{ha } 0 < A < 1, \\ ?, & \text{ha } A \leq 0 \text{ vagy } A = 1, \end{cases} \quad (1^\infty)$

DE

- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n - c_n = \infty - \infty = ?$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{c_n} = \frac{\infty}{\infty} = ?$.

Műveletek ∞ -hez tartó sorozatokkal

Kritikus határértékek: $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, 1^∞ , $0^0 \dots$

Példa.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n} = \frac{\infty}{\infty} = \infty \quad \text{DE} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = \frac{\infty}{\infty} = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2n - n = \infty - \infty = \infty \quad \text{DE} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n - n^2 = \infty - \infty = -\infty.$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \infty - \infty = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\infty + \infty} = 0. \end{aligned}$$

Nevezetes sorozatok

Mértani sorozat

$a_n = q^n$, $n \in \mathbb{N}$ - számok egész hatványainak sorozata: $\{1, q, q^2, q^3, \dots\}$.

Legyen $q = 2$, ekkor $\{1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$.

- Ha $q > 1$, monoton növő, nem korlátos, **∞ -hez** tartó a sorozat.

Legyen $q = 1$, ekkor $\{1, 1, 1, 1, \dots\}$.

- Ha $q = 1$, konstans sorozat, **1-hez** tart.

Legyen $q = \frac{1}{2}$ vagy $-\frac{1}{2}$, ekkor $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right\}$ vagy $\left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots\right\}$.

- Ha $-1 < q < 1$, abszolútértékben monoton csökken, tehát **0-hoz** tart.

Legyen $q = -2$, ekkor $\{1, -2, 4, -8, 16, \dots\}$.

- Ha $q < -1$, oszcillál, nem korlátos, **divergens** a sorozat.

Nevezetes sorozatok

Egész gyökök sorozata

$a_n = \sqrt[n]{q}$ - számok egész gyökeinek sorozata **1-hez** tart, ha $q > 0$.

Ha $q > 1$, akkor $\sqrt[n]{q} = 1 + p_n$ alakban írható.

Tehát $q = (1 + p_n)^n > 1 + n \cdot p_n$, ebből

$$\frac{q - 1}{n} > p_n > 0$$

adódik. A rendőr-elv alapján a p_n -ek sorozata 0-hoz tart.

Így $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{q} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + p_n = 1 + 0 = 1$.

$b_n = \sqrt[n]{n}$ - egész számok egész gyökeinek sorozata **1-hez** tart.

$1 \leq \sqrt[n]{n}$ és monoton csökkenő a sorozat, ha $n \geq 3$,

$\sqrt{2} = 1,4142\dots < \sqrt[3]{3} = 1,4422\dots > \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} > \sqrt[5]{5} = 1,3797\dots$

(Korlátok?)

Példa.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2n-1} = ?$$

Példa.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2n-1} = ?$$

Rendőr-elv segítségével:

$$\begin{array}{ccc} \sqrt[n]{n} < \sqrt[n]{2n-1} < \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 & & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \cdot 1 = 1 \end{array}$$

Tehát $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2n-1} = 1$.

Az "e" szám

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ - sorozat } e\text{-hez tart.}$$

Az $a_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2 < e$ és monoton növekvő a sorozat.
Továbbá a_n felülről korlátos. Nem adunk teljes indoklást!

$$b_n = \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n \text{ - sorozat } e^k\text{-hoz tart.}$$

Példa.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+5}{n-1} \right)^{2n+2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{6}{n-1} \right)^{n-1} \right)^{\frac{2n+2}{n-1}} = \\ &\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{6}{m} \right)^m \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{n-1}} = \\ &= (e^6)^2 = e^{12}.\end{aligned}$$

Végtelenbe tartó sorozatok "erő" sorrendje

$$n \ll_{k>1} n^k$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{k-1}} = 0$$

Végtelenbe tartó sorozatok "erő" sorrendje

$$n \ll \underset{k>1}{n^k} \ll \underset{a>1}{a^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^k} \underset{k>1}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{k-1}} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} \underset{a>1, k>1}{=} 0,$$

Végtelenbe tartó sorozatok "erő" sorrendje

$$n \ll n^k_{k>1} \ll a^n_{a>1} \ll n!$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^k} = \lim_{k>1} \frac{1}{n^{k-1}} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad a>1, k>1$$

Végtelenbe tartó sorozatok "erő" sorrendje

$$n \ll n^k_{k>1} \ll a^n_{a>1} \ll n! \ll n^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^k} = \lim_{k>1} \frac{1}{n^{k-1}} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Végtelenbe tartó sorozatok "erő" sorrendje

$$\sqrt[k]{n} \ll n \ll n^k \ll a^n \ll n! \ll n^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^k} = \lim_{k > 1} \frac{1}{n^{k-1}} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[k]{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{k-1}{k}}} = 0,$$

Végtelenbe tartó sorozatok "erő" sorrendje

$$\log_a(n) \ll_{a>1} \sqrt[k]{n} \ll_{k>1} n \ll_{k>1} n^k \ll_{a>1} a^n \ll n! \ll n^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^k} = \lim_{k>1} \frac{1}{n^{k-1}} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[k]{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{k-1}{k}}} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a(n)}{\sqrt[k]{n}} = 0.$$