Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2023. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

6. előadás:
Függvényhatárértékek,
Az átviteli-elv,
Végtelenbe tartás

Határérték definíciója

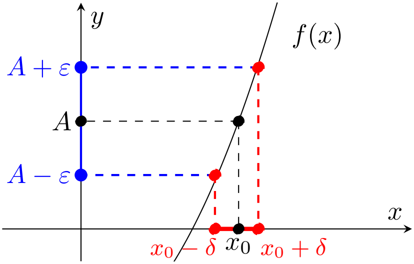
Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az x_0 pontban a **határértéke** A, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, ha $|x - x_0| < \delta$ ahol $x \neq x_0$ és $x \in D_f$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Jelölés:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

vagy

$$f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} A.$$



Nem követeljük meg, hogy a függvény x_0-ban értelmezve legyen.

Példa

Az $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2}$ függvény értelmezési tartománya: $D_f = \mathbb{R} \backslash \{2\}$.

Mennyi a határértéke $x_0 = 2$-ben?

Példa

Az $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2}$ függvény értelmezési tartománya: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Mennyi a határértéke $x_0 = 2$-ben?

$f(x) = \dfrac{(2x+1)(x-2)}{x-2}$, így ha $x \neq 2$, akkor $f(x) = 2x+1$, és $2x+1 \approx 5$, ha x közelít 2-höz.

Definiálhatnánk így is a függvényt:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{ha } x \neq 2 \\ \text{nincs értelmezve,} & \text{ha } x = 2 \end{cases}$$

Sejtjük, hogy $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$. A definíció alapján

$$\left| \frac{(2x+1)(x-2)}{x-2} - 5 \right| < \varepsilon \quad x \neq 2$$

$$|2x - 4| < \varepsilon$$

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{2} = \delta \text{ jó lesz!}$$

Az egészrész függvény

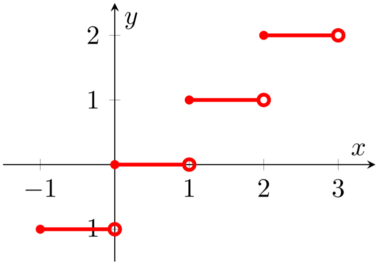
Mi a helyzet az $f(x) = [x] = \{k \in \mathbb{Z} \,|\, k \leq x < k+1\}$ egészrész függvénnyel $x_0 = 2$-ben?

Ha $|x-2| < \delta < 1$ és $x \neq 2$, akkor

$$f(x) = 2, \text{ ha } x > 2, \text{ és}$$
$$f(x) = 1, \text{ ha } x < 2.$$

Tehát $|f(x) - A| < \varepsilon < \frac{1}{2}$ nem teljesül sem $A = 1$-gyel, sem $A = 2$-vel.

Így a határérték nem létezik.



Jobb és bal oldali határérték

Érdemes külön tekinteni a két oldalt:

Jobb oldali határérték ($x_0 < x$):
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ valós függvénynek az x_0 pontban a jobb oldali határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < x - x_0 < \delta$ esetén $x \in D_f$, és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = A$.

Bal oldali határérték ($x < x_0$):
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ valós függvénynek az x_0 pontban a bal oldali határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < x_0 - x < \delta$ esetén $x \in D_f$, és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = A$.

Előző példában: $\lim\limits_{x \to 2-} [x] = 1,$ és $\lim\limits_{x \to 2+} [x] = 2.$

Határérték egyértelműsége

Tétel: Ha az f függvénynek x_0 pontban létezik a jobb és bal oldali határértéke, és ezek egyenlőek, akkor a függvénynek létezik az x_0 pontban határértéke, és ez megegyezik a jobb és bal oldali határértékkel.

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = A = \lim_{x \to x_0+} f(x) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

Tétel: Ha létezik a határérték, akkor egyértelmű:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ és } \lim_{x \to x_0} f(x) = B \text{ esetén } A = B.$$

Indirekt bizonyítás: $\varepsilon = \dfrac{|A - B|}{3}$-hoz nincs jó δ,

hasonlóan, mint a sorozatoknál ε-hoz nincsen N_ε.

Átviteli-elv

Egy függvénynek x_0-ban A a határértéke akkor és csak akkor, ha **bármely** $\{x_n\}$ sorozatra, mely $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $x_n \in D_f$, igaz lesz, hogy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

Ezek alapján belátható, hogy csak úgy, mint a sorozatoknál, ha

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ és $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$ és $A, B \in \mathbb{R}$, akkor

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm g(x) = A \pm B$,
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$,
- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$ feltéve, hogy $g(x) \neq 0$ és $B \neq 0$.

Féloldali határértékekre hasonlóan.

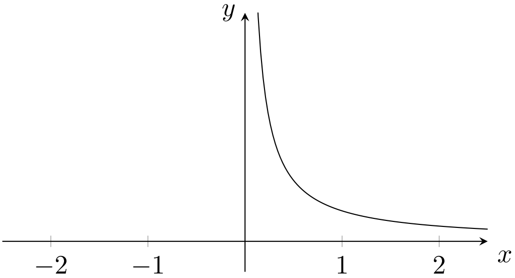
Végtelen határérték

Mi a helyzet az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvénnyel a 0 pont jobb oldalán? $(0 \notin D_f)$

Végtelen határérték

Mi a helyzet az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvénnyel a 0 pont jobb oldalán? $(0 \notin D_f)$

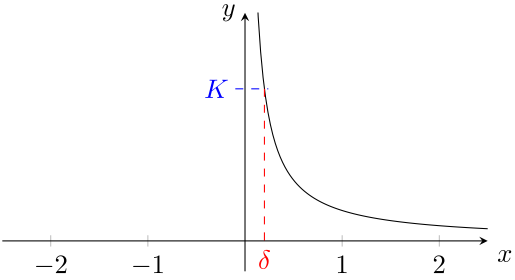
Minél közelebb vagyunk a 0-hoz, annál nagyobb a függvényérték, tehát a függvény a végtelenhez tart.



Végtelen határérték

Mi a helyzet az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvénnyel a 0 pont jobb oldalán? $(0 \notin D_f)$

Minél közelebb vagyunk a 0-hoz, annál nagyobb a függvényérték, tehát a függvény a végtelenhez tart.



Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ valós függvénynek az x_0 **pontban a határértéke jobbról** ∞, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < x - x_0 < \delta$ esetén $x \in D_f$, és $f(x) > K$.

Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = +\infty$.

Végtelen határérték – variációk

Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ valós függvénynek az x_0 **pontban a határértéke (jobb-ról/balról)** ∞, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez van olyan $\delta > 0$, hogy $|x - x_0| < \delta$ (és $x > x_0$/és $x < x_0$) esetén $x \in D_f$, és $f(x) > K$.

$$\text{Jelölés:} \quad \lim_{x \to x_0(\pm)} f(x) = \infty.$$

Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ valós függvénynek az x_0 **pontban a határértéke (jobb-ról/balról)** $-\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $|x - x_0| < \delta$, $(x > x_0/x < x_0)$ esetén $x \in D_f$, és $f(x) < K$.

$$\text{Jelölés:} \quad \lim_{x \to x_0(\pm)} f(x) = -\infty.$$

Példában $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{x} = \infty$ DE $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$. Továbbá $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = \infty$.

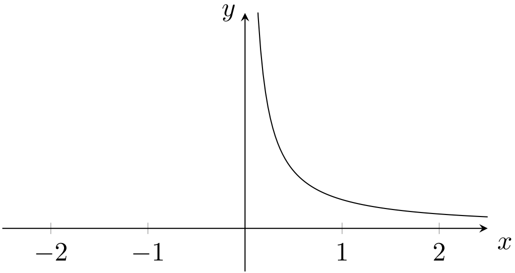
Határérték a végtelenben

Nem csak a határérték lehet végtelen, hanem a végtelenben is vizsgálhatjuk a függvény viselkedését.

Határérték a végtelenben

Nem csak a határérték lehet végtelen, hanem a végtelenben is vizsgálhatjuk a függvény viselkedését.

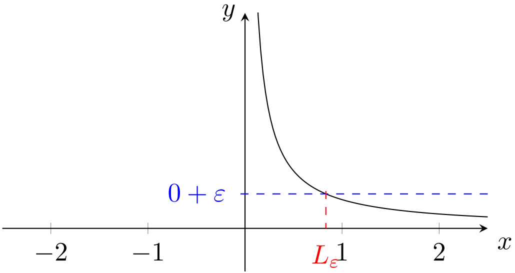
Az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvénnyel a ∞-ben 0-hoz tart.



Határérték a végtelenben

Nem csak a határérték lehet végtelen, hanem a végtelenben is vizsgálhatjuk a függvény viselkedését.

Az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvénnyel a ∞-ben 0-hoz tart.



Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ valós függvénynek a **∞-ben a határértéke** A, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $L_\varepsilon \in \mathbb{R}$, hogy $L_\varepsilon < x$ esetén $x \in D_f$, és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Jelölés: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

Végtelenben végtelen

Lehetséges, hogy a végtelenben a függvény $(\pm)$végtelenhez tart:

Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ valós függvény a ∞-**ben** $(-)\infty$-**hez tart**, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez van olyan $L_K \in \mathbb{R}$, hogy $L_K < x$ esetén $x \in D_f$ és $f(x) > K$ $(f(x) < K)$.

$$\text{Jelölés:} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = (-)\infty$$

Hasonlóan a $-\infty$-ben tarthat f egy A számhoz vagy $\pm\infty$-hez:

Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ valós függvénynek a $-\infty$-**ben a határértéke** A, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}$-hez van olyan $L_\varepsilon \in \mathbb{R}$, hogy $L_\varepsilon > x$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$\text{Jelölés:} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = A$$

Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ valós függvény a $-\infty$-**ben** $(-)\infty$-**hez tart**, ha minden $K \in \mathbb{R}$-hez van olyan $L_K \in \mathbb{R}$, hogy $L_K > x$ esetén $x \in D_f$ és $f(x) > K$ $(f(x) < K)$.

$$\text{Jelölés:} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = (-)\infty$$

Összefoglalás

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ $(D_f \subseteq \mathbb{R})$ függvénynek

az x_0 pontban a
az x_0 pontban a jobb oldali
az x_0 pontban a bal oldali
a $+\infty$-ben a
a $-\infty$-ben a

határértéke

$A \in \mathbb{R}$,
$+\infty$,
$-\infty$,

ha minden

$\varepsilon > 0$-hoz
$K \in \mathbb{R}$-hez
$K \in \mathbb{R}$-hez

van olyan

$\delta > 0$,
$L_\varepsilon \in \mathbb{R}$,
$L_K \in \mathbb{R}$,

hogy

$0 < |x - x_0| < \delta$
$0 < x - x_0 < \delta$
$0 < x_0 - x < \delta$
$L_\varepsilon < |x|$
$L_K < |x|$

esetén $x \in D_f$ és

$|f(x) - A| < \varepsilon$.
$f(x) > K$.
$f(x) < K$.