

# Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem  
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar  
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2023. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia

[belus@math.bme.hu](mailto:belus@math.bme.hu)

[geometria.math.bme.hu/bela-szilvia](https://geometria.math.bme.hu/bela-szilvia)

**7. előadás:**  
**Nevezetes függvényhatárértékek,  
Hiperbolikus függvények és inverzeik,  
Folytonosság, szakadási pontok**

## Nevezetes határértékek

**Polinomfüggvények:**  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $D_f = \mathbb{R}$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a_n x^n + \dots + a_0 = \begin{cases} \infty & a_n > 0, \\ -\infty & a_n < 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n + \dots + a_0 = \begin{cases} \infty & a_n > 0, n \text{ páros, vagy } a_n < 0, n \text{ páratlan} \\ -\infty & a_n < 0, n \text{ páros, vagy } a_n > 0, n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

**Példa:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} -x^2 + 4x + 1 = -\infty = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 + 4x + 1$

**Racionális tört függvények:**  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ , ahol  $p, q$  polinomok,

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) = 0\}.$$

**Példa:**

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x^2-1} = \frac{2+3}{2^2-1} = \frac{5}{3}, \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x^2-1} = \frac{-3+3}{(-3)^2-1} = \frac{0}{8} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+3/x}{x-1/x} = \frac{1+0}{\infty-0} = 0$$

## Példa - Féloldali határérték

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x+3}{x^2-1} = ?$$

legyen  $x = 1 + h$ , ahol  $h > 0$ , ha  $x \rightarrow 1+$  akkor  $h \rightarrow 0+$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h+4}{h^2+2h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h+4}{h(h+2)} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{h} \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h+4}{h+2} = \infty \cdot 2 = \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x+3}{x^2-1} = ?$$

legyen  $x = 1 - h$ , ahol  $h > 0$ , ha  $x \rightarrow 1-$  akkor  $h \rightarrow 0+$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{4-h}{h^2-2h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{4-h}{h(h-2)} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{h} \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{4-h}{h-2} = \infty \cdot (-2) = -\infty.$$

## Nevezetes határértékek

**Gyökfüggvény:**  $f(x) = \sqrt[n]{x}$ ,  $D_f = [0, \infty)$  és  $n \in \mathbb{Z}^+$ . Monoton növekvő, nem korlátos felülről.

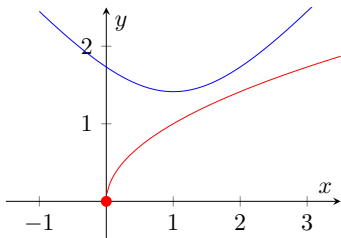
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[n]{x} = 0.$$

Példa:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - 2x + 3} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{(x-1)^2 + 2} = \infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 3} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^\pm} \sqrt{x^2 - 2x + 3} = \sqrt{11}$$



## Nevezetes határértékek

Exponenciális függvény:  $f(x) = a^x$ ,  $a > 0$ ,  $D_f = \mathbb{R}$ .

$$\text{ha } a > 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0.$$

$$\text{ha } a < 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty.$$

Példa:  $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^{-x^2+4x+1} = 2^{-\infty} = 0$

Logaritmus függvény:  $f(x) = \log_a(x)$ ,  $D_f = \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ .

$$\text{ha } a > 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = -\infty.$$

$$\text{ha } a < 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = \infty.$$

Példa:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_2(x^2 - 2x + 3) = \log_2(\infty) = \infty$

# Nevezetes határértékek - Hyperbolikus függvények

Sinus hyperbolikus:

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, D_{\operatorname{sh}} = \mathbb{R}.$$

Monoton növekvő, páratlan.

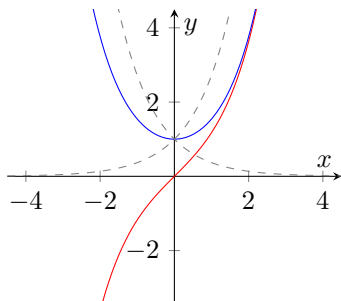
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{sh}(x) = \pm\infty$$

Cosinus hyperbolikus:

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, D_{\operatorname{ch}} = \mathbb{R}.$$

Alulról korlátos, páros.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{ch}(x) = \infty$$



$$\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$$

# Nevezetes határértékek - Hyperbolikus függvények

Tangens hyperbolikus:

$$\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}, D_{\operatorname{th}} = \mathbb{R}.$$

Monoton növekvő, korlátos, páratlan.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{th}(x) = \pm 1$$

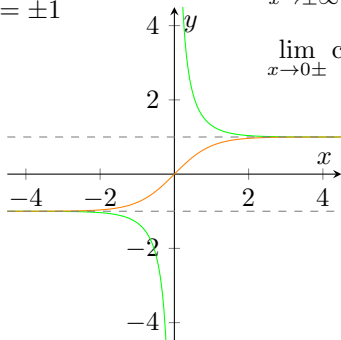
Cotangens hyperbolikus:

$$\operatorname{cth}(x) = \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)}, D_{\operatorname{cth}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Monoton csökkenő, páros.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{cth}(x) = \pm 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0\pm} \operatorname{cth}(x) = \pm\infty$$





## Nevezetes határértékek - Area függvények

Area sinus hyperbolikus:

$$\operatorname{sh}^{-1}(x) = \operatorname{arsh}(x), D_{\operatorname{arsh}} = \mathbb{R}.$$

Monoton növő, páratlan.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arsh}(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arsh}(x) = -\infty$$

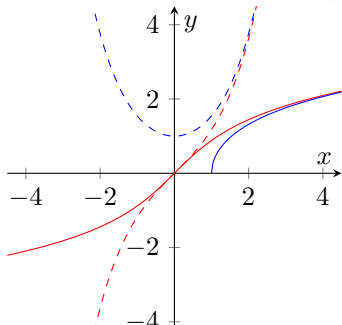
Area cosinus hyperbolikus:

$$\operatorname{ch}^{-1}(x) = \operatorname{arch}(x), D_{\operatorname{arch}} = [1, \infty).$$

Monoton növő.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arch}(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \operatorname{arch}(x) = 0$$



## Area függvények logaritmikus alakja

Az sh függvény injektív, fejezzük ki az  $\text{sh}(x) = y$  egyenlet segítségével az inverz hozzárendelési szabályát:

$$\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y$$
$$e^x - e^{-x} = 2y$$

$$(e^x)^2 - 2y \cdot (e^x) - 1 = 0$$

$$a^2 - 2y \cdot a - 1 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1} = e^x, \text{ ha } y \pm \sqrt{y^2 + 1} > 0,$$

$$\ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) = x.$$

$$\text{arsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

## Nevezetes határértékek - Area függvények

Area tangens hyperbolikus:

$$\operatorname{th}^{-1}(x) = \operatorname{arth}(x),$$

$$D_{\operatorname{arth}} = (-1, 1).$$

Monoton növekvő, páratlan.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \operatorname{arth}(x) = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \operatorname{arth}(x) = -\infty$$

Area cotangens hyperbolikus:

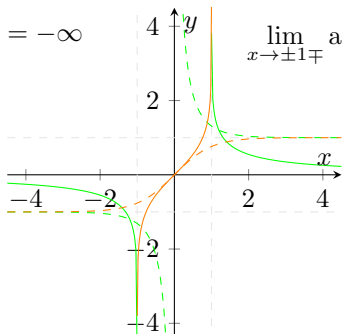
$$\operatorname{cth}^{-1}(x) = \operatorname{arcth}(x)$$

$$D_{\operatorname{arcth}} = \mathbb{R} \setminus [-1, 1].$$

Monoton csökkenő, páros.

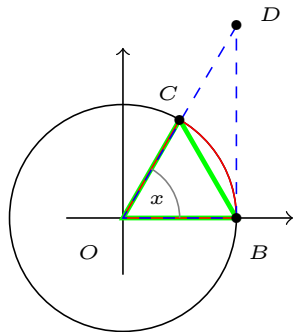
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{arcth}(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1^\mp} \operatorname{arcth}(x) = \pm\infty$$



## Nevezetes határértékek

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$



$$T_{\triangle OCB} = \frac{\sin(x) \cdot 1}{2} < T_{\triangle BC} = \frac{x}{2\pi} \cdot \pi < T_{\triangle OBD} = \frac{1 \cdot \operatorname{tg}(x)}{2}$$

$$\sin(x) < x < \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)}$$

Rendőr-elv

↓

$x \xrightarrow{\downarrow} 0$

↓

1

1

1

## Nevezetes határértékek

Az "e" szám

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{a függvény határértéke a végtelenben } e.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k.$$

Példa.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x-1}\right)^{2x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{6}{x-1}\right)^{x-1}\right)^{\frac{2x+2}{x-1}} = (e^6)^2 = e^{12}.$$

## Pontbeli folytonosság

Az  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D_f \subseteq \mathbb{R}$ ) függvény **folytonos** az  $x_0 \in D_f$  pontban, ha a függvény határértéke és a függvény értéke megegyezik  $x_0$ -ban:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

**Ekvivalens definíció:**

Az  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D_f \subseteq \mathbb{R}$ ) függvény folytonos az  $x_0 \in D_f$  pontban, ha minden  $\varepsilon > 0$ -hoz létezik  $\delta > 0$ , hogy  $|x - x_0| < \delta$  esetén  $x \in D_f$  és  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

Hasonlóan **egyoldali folytonosság:**

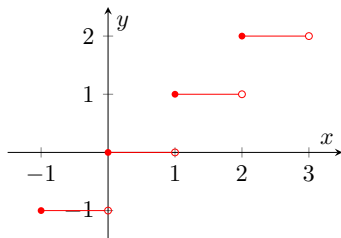
Az  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D_f \subseteq \mathbb{R}$ ) függvény **jobbról folytonos** az  $x_0 \in D_f$  pontban, ha  $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0)$ .

Az  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D_f \subseteq \mathbb{R}$ ) függvény **balról folytonos** az  $x_0 \in D_f$  pontban, ha  $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = f(x_0)$ .

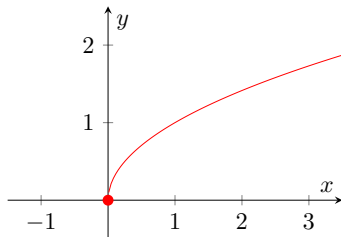
Ha egy függvény egy pontjában jobbról és balról is folytonos, akkor folytonos abban a pontban.

## Példák

$f(x) = [x]$  függvény az egész helyeken jobbról folytonos, de balról nem.



$f(x) = \sqrt{x}$  függvény a 0-ban csak jobbról folytonos, hiszen csak jobbról van értelmezve.



## Függvények folytonossága

Általában egy  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D_f \subseteq \mathbb{R}$ ) **függvény folytonos**, ha minden  $x_0 \in D_f$  pontban folytonos.

Az  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  függvény folytonos, ha minden  $x_0 \in (a, b)$  pontban folytonos, és  $a$ -ban jobbról,  $b$ -ben balról folytonos.

**Példák:**

$x$ ,  $x^2$ ,  $|x|$ ,  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\frac{1}{x}$  folytonosak a teljes értelmezési tartományukon.

$[x]$  egészrész függvény csak az egész pontokon kívül folytonos. Az egész értékekben csak jobbról folytonos.

A Diriclet-függvény sehol sem folytonos.



## Példa

Határozzuk meg az  $a$  paraméter értékét, hogy az alábbi függvény folytonos legyen.

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{ha } x < 2 \\ a, & \text{ha } x = 2 \\ x^2 - 3, & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$

## Példa

Határozzuk meg az  $a$  paraméter értékét, hogy az alábbi függvény folytonos legyen.

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{ha } x < 2 \\ a, & \text{ha } x = 2 \\ x^2 - 3, & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$

A függvény az  $x \neq 2$  pontokban folytonos.

Az  $x = 2$  pontban:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} x - 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 - 3 = 1, \end{aligned}$$

A függvény pontosan akkor folytonos  $x = 2$ -ben, ha  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ .

Tehát az kell, hogy  $a = f(2) = 1$  legyen.