Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2023. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

8. előadás: Szakadási helyek osztályozása, Korlátos és zárt intervallumon folytonos függvények tulajdonságai

Függvények folytonossággal kapcsolatos tulajdonságai

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény **folytonos** az $x_0 \in D_f$ pontban, ha a függvény határértéke és a függvény értéke megegyezik x_0-ban:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Tétel: Egy adott x_0 pontban folytonos függvények összege, különbsége, szorzata és hányadosa (feltéve, hogy a nevező nem 0) is folytonos az x_0 pontban.

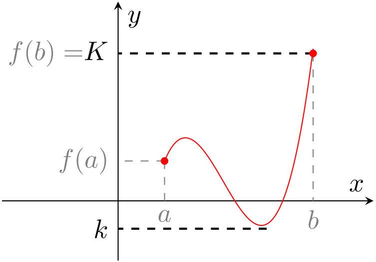
Tétel: Ha a g függvény folytonos x_0-ban és f függvény folytonos a $g(x_0)$-ban, akkor $f \circ g$ is folytonos x_0-ban.

Tétel: Ha az f függvény szigorúan monoton és folytonos, akkor az f^{-1} inverz létezik és folytonos (és monoton).

Zárt intervallumon folytonos függvények

Tétel. Az $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ **zárt intervallumon folytonos függvény korlátos**, azaz létezik $k, K \in \mathbb{R}$, hogy

$$k \le f(x) \le K \text{ minden } x \in [a,b]\text{-re.}$$

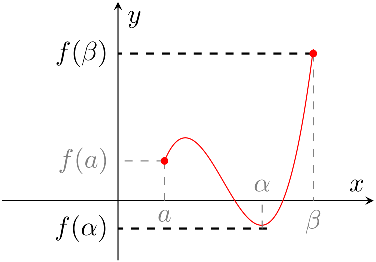


Lényeges, hogy az értelmezési tartomány zárt intervallum, pl: $f(x) = \frac{1}{x}$ a $(0,1]$ intervallumon nem korlátos.

Zárt intervallumon folytonos függvények

Weierstrass-tétel. Az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zárt intervallumon folytonos függvény felveszi a minimum és maximum értékét, azaz van olyan $\alpha, \beta \in [a,b]$, hogy

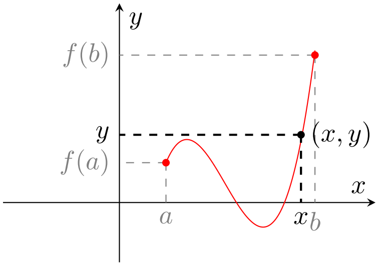
$$f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta) \text{ minden } x \in [a,b]\text{-re.}$$



A zárt intervallum itt is lényeges, ha $f(x)$ függvényt csak az (a,b) intervallumon van értelmezve, akkor nincs megfelelő β ($\beta = b \notin (a,b)$).

Zárt intervallumon folytonos függvények

Bolzano-tétel. Az $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zárt interallumon folytonos függvény az $f(a)$ és $f(b)$ között minden értéket felvesz, azaz ha $f(a) \le y \le f(b)$ vagy $f(b) \le y \le f(a)$, akkor létezik olyan $x \in [a,b]$, hogy $f(x) = y$.

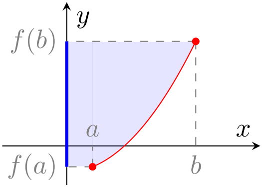


A folytonosság lényeges, mert pl. az egészrész függvény nem veszi fel az $\frac{1}{2}$ értéket.

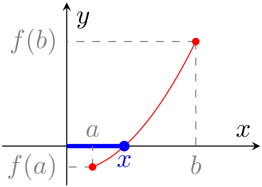
Zárt intervallumon folytonos függvények

Bolzano és Weierstrass tételének következménye.

(1) Zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény a minimuma és a maximuma között minden értéket felvesz.



(2) Az $[a, b]$ zárt intervallumon értelmezett folytonos függvénynek, ha $f(a) < 0$ és $f(b) > 0$ (vagy fordítva), akkor f-nek létezik az intervallumban gyökhelye, azaz $\exists x \in (a, b)$, hogy $f(x) = 0$.



Szakadási pontok

Ha egy $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ $(D_f \subseteq \mathbb{R})$ függvény értelmezett az $(x_0-\varepsilon, x_0)$ és $(x_0, x_0+\varepsilon)$ intervallumon, de x_0-ban nem, vagy $x_0 \in D_f$ estén a függvény ott nem folytonos, akkor x_0 a függvény **szakadási pontja**.

Osztályozásuk:

Elsőfajú szakadások: $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ és $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ létezik (valós szám)

- Megszűnetethető szakadás: $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = H$ és $H \neq f(x_0)$ vagy $x_0 \notin D_f$
- Ugrás: $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$

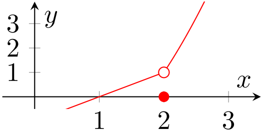
Másodfajú szakadások: $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ és/vagy $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ nem létezik (esetleg $\pm\infty$)

- Pólus: $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = \pm\infty$ és $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \pm\infty$

Szakadási helyek osztályozása

Elsőfajú szakadások: $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ és $\lim_{x\to x_0+} f(x)$ létezik

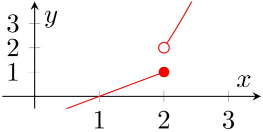
- Megszüntethető szakadás



$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x) = H \text{ és}$$

$$x_0 \notin D_f \text{ vagy } H \neq f(x_0).$$

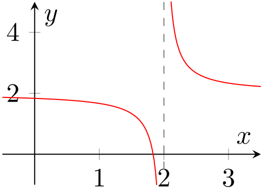
- Ugrás



$$\lim_{x\to x_0-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0+} f(x)$$

Másodfajú szakadás: $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ és/vagy $\lim_{x\to x_0+} f(x)$ nem létezik

- Pólus

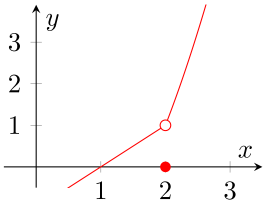


$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = \pm\infty \quad \text{és}$$

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = \pm\infty$$

- **Megszüntethető szakadás**

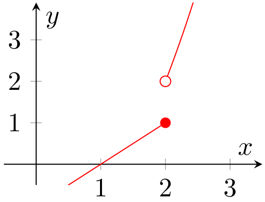
$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{ha } x < 2 \\ 0, & \text{ha } x = 2 \\ x^2-3, & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$



$$\lim_{x\to 2-} x-1 = 1 = \lim_{x\to 2+} x^2-3$$

- **Ugrás**

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{ha } x \le 2 \\ x^2-2, & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$

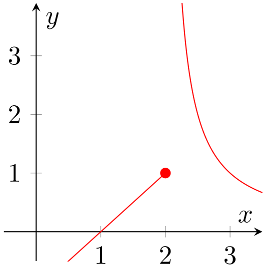


$$\lim_{x\to 2-} x-1 = 1 \neq \lim_{x\to 2+} x^2-2 = 2$$

- **Másodfajú szakadás**

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{ha } x \le 2 \\ \dfrac{1}{x-2}, & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2-} x-1 = 1, \qquad \lim_{x\to 2+} \frac{1}{x-2} = \infty$$



- **Pólus**

$$f(x) = \frac{1}{x-2}, \text{ ha } x \ne 2$$

$$\lim_{x\to 2-} \frac{1}{x-2} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 2+} \frac{1}{x-2} = \infty$$