Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2023. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

10. elődás:
Egyoldali derivált, Érintőegyenes egyenlete, Láncszabály, Inverz függvény deriválása, Magasbb rendű deriváltak

Ismétlés: differenciálhányados (derivált)

Definíció: Legyen az $f : D_f \to \mathbb{R}$ az x_0 környezetében értelmezett. Ha létezik

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

az f függvény x_0 pontbeli differenciahányados függvényének határértéke, akkor ezt a határértéket f x_0-beli **differenciálhányadosának** (vagy **deriváltjának**) nevezzük.

Jelölése: $f'(x_0)$, $\dot{f}(x_0)$, $\dfrac{df}{dx}(x_0)$ vagy $\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x_0}$

Geometriai jelentés: a szelők "határmeredeksége" a görbéhez a legjobban simuló egyenes (**érintő**) meredeksége $(x_0, f(x_0))$ pontban.

Ha az f függvénynek létezik a differenciálhányadosa az x_0 pontban, akkor az f **differenciálható/deriválható/diffható az x_0-ban**.

Az f **függvény differenciálható**, ha az értelmezési tartományának minden pontjában differenciálható. Egy differenciálható f függvény **derivált függvénye**:

$$f' : x_0 \mapsto f'(x_0), \qquad x_0 \in D_f.$$

Egyoldali deriváltak (a differenciahányados féloldali határértéke)

Jobb oldali derivált x_0-ban : $\lim\limits_{h \to 0+} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

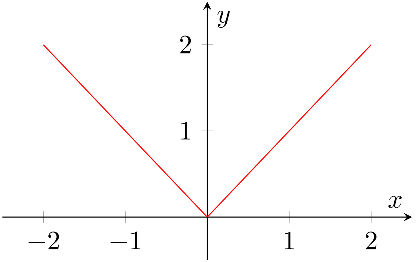
Bal oldali derivált x_0-ban: $\lim\limits_{h \to 0+} \dfrac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h}$.

Példa: $f(x) = |x|$.

Differenciahányadosa $x_0 = 0$-ban:

$$\frac{f(0 \pm h) - f(0)}{\pm h} = \frac{|0 \pm h| - |0|}{\pm h} \underset{h>0}{=} \frac{h}{\pm h} = \begin{cases} 1, & \text{ha } h > 0 \\ -1, & \text{ha } h < 0 \end{cases}$$

$h = 0$-ban nincs határértéke, de van jobb és bal oldali határérték:



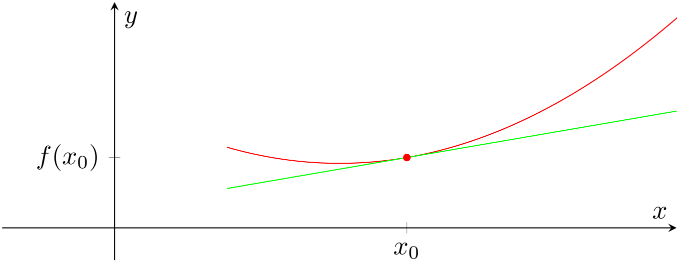
Deriválás lineáris átfogalmazása

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ $((x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq D_f)$ függvény az x_0 pontban differenciálható, és deriváltja x_0-ban M, ha létezik egy $\varepsilon(x)$ függvény, melyre $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$, és

$$f(x) = M \cdot (x-x_0) + f(x_0) + \varepsilon(x)\cdot(x-x_0).$$

Tehát a függvény:

$$f(x) = \underbrace{f'(x_0)\cdot(x-x_0) + f(x_0)}_{\text{érintő: legjobban simuló egyenes}} + \underbrace{\varepsilon(x)\cdot(x-x_0)}_{\text{hibatag}}.$$



Érintő

Az f függvény grafikonjának érintője az x_0 pontban az $(x_0, f(x_0))$ ponton átmenő, $f'(x_0)$ meredekségű egyenes, azaz

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

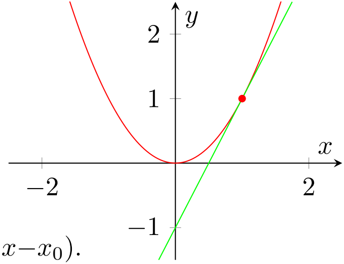
Példa:

Írjuk fel az $f(x) = x^2$ függvény érintőjét az $x_0 = 1$ pontban.

$f'(x) = 2x$, így $f'(1) = 2$.

Másrészt $f(1) = 1$, így

$$y = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1.$$



Lineáris átfogalmazásban:

$$x^2 = \underbrace{2x_0 \cdot (x - x_0)}_{M\cdot(x-x_0)} + \underbrace{x_0^2}_{f(x_0)} + \underbrace{(x - x_0)}_{\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0} (x-x_0).$$

Példa

Írjuk fel az $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ függvény érintőjét az $x_0 = 0$ pontban.

Példa

Írjuk fel az $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ függvény érintőjét az $x_0 = 0$ pontban.

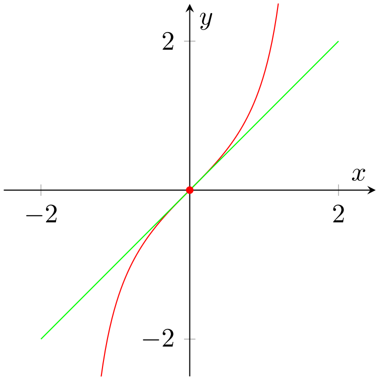
$f'(x) = \dfrac{1}{(\cos x)^2}$, így $f'(0) = 1$.

Másrészt $f(0) = 0$, így

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$y = 1(x-0) + 0 \quad \text{azaz}$$

$$y = x.$$



Folytonosság és deriválhatóság

Tétel: Ha egy függvény egy $x_0 \in D_f$ pontban differenciálható, akkor az x_0 pontban folytonos is.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} M(x - x_0) + f(x_0) + \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x)(x - x_0) =$$

$$= M \cdot 0 + f(x_0) + 0 \cdot 0 = f(x_0).$$

FONTOS!

Visszafelé nem igaz, pl. az abszolútérték függvény a 0-ban folytonos, de ott nem differenciálható (a grafikon nem "sima", folytonosan csatlakozik, de törés van rajta).

Korábbi műveleti tulajdonságok

Tétel. Ha az f és g függvények deriválhatóak egy x pontban, akkor

- $c \cdot f$ is deriválható ($c \in \mathbb{R}$), és $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$,
- $f + g$ is deriválható, és $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,
- $f - g$ is deriválható, és $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$,
- $f \cdot g$ is deriválható, és $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
- $\dfrac{f}{g}$ is deriválható ($g(x) \neq 0$), és $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Inverz függvény deriválása

Tétel: Ha az $f : D_f \to \mathbb{R}$ függvény az $x \in D_f$ pont környezetében szigorúan monoton és diffható (azaz folytonos is) továbbá $f'(x) \neq 0$, akkor f^{-1} létezik, és differenciálható $y = f(x)$-ben. Ekkor

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Példák:

- $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ monoton növő és deriválható, az $f^{-1}(y) = \ln(y)$

$$(\ln(y))' = \frac{1}{(e^x)'} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{\ln(y)}} = \frac{1}{y}.$$

- $f(x) = \sin(x)$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ monoton és folytonos, $f^{-1}(y) = \arcsin(y)$

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin(x))'} \underset{\substack{\cos(x) > 0, \\ \text{ha } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}}{=} \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin(\arcsin(y))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Hasonlóan $\quad (\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ és $(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1 + x^2}.$

Összetett függvények deriválása (láncszabály)

Tétel: Ha a g függvény differenciálható az x helyen, és az f függvény differenciálható a $g(x)$ helyen, akkor az $f \circ g$ függvény is differenciálható az x helyen, és

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Példák:

$$(\ln(\cos(x)))' = \frac{1}{\cos(x)} \cdot (-\sin(x)) = -\mathrm{tg}(x)$$

$$\left(e^{-x}\right)' = e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x}$$

Hiperbolikus függvények deriváltjai:

$$(\mathrm{ch}x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}(x)$$

$$(\mathrm{sh}x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x)$$

Logaritmikus derivált

Az a^x deriváltja ($a > 0$):

$$(a^x)' = \left(e^{\ln(a^x)}\right)' = \left(e^{x\ln(a)}\right)' = e^{x\ln(a)} \cdot \ln(a) = a^x \ln(a)$$

Példa:

$$\left(x^{\sin(x)}\right)' = \left(e^{\sin(x)\ln(x)}\right)' = e^{\sin(x)\ln(x)}\left(\cos(x)\ln(x) + \sin(x)\,\frac{1}{x}\right) =$$

$$= x^{\sin(x)}\left(\cos(x)\ln(x) + \sin(x)\,\frac{1}{x}\right).$$

További példák

$$(\mathrm{sh}(7x+6))'$$

További példák

$$(\mathrm{sh}(7x+6))' = \mathrm{ch}(7x+6)\cdot 7 = 7\mathrm{ch}(7x+6)$$
$$(\mathrm{sh}(x))' = \mathrm{ch}(x)$$

További példák

$$(\mathrm{sh}(7x+6))' = \mathrm{ch}(7x+6)\cdot 7 = 7\mathrm{ch}(7x+6)$$
$$(\mathrm{sh}(x))' = \mathrm{ch}(x)$$

$$\left((x+2)^2\right)'$$

További példák

$$(\mathrm{sh}(7x+6))' = \mathrm{ch}(7x+6)\cdot 7 = 7\mathrm{ch}(7x+6)$$
$$(\mathrm{sh}(x))' = \mathrm{ch}(x)$$

$$\left((x+2)^2\right)' = 2(x+2)\cdot 1 = 2x+4$$
$$((x+2)^2)' = (x^2+4x+4)' = 2x+4$$

További példák

$$(\mathrm{sh}(7x+6))' = \mathrm{ch}(7x+6)\cdot 7 = 7\mathrm{ch}(7x+6)$$
$$(\mathrm{sh}(x))' = \mathrm{ch}(x)$$

$$\left((x+2)^2\right)' = 2(x+2)\cdot 1 = 2x+4$$
$$((x+2)^2)' = (x^2+4x+4)' = 2x+4$$

$$\left(3^{2-x}\right)'$$

További példák

$$(\mathrm{sh}(7x+6))' = \mathrm{ch}(7x+6)\cdot 7 = 7\mathrm{ch}(7x+6)$$
$$(\mathrm{sh}(x))' = \mathrm{ch}(x)$$

$$\left((x+2)^2\right)' = 2(x+2)\cdot 1 = 2x+4$$
$$((x+2)^2)' = (x^2+4x+4)' = 2x+4$$

$$\left(3^{2-x}\right)' = 3^{2-x}\ln 3\cdot(-1) = -3^{2-x}\ln(3)$$
$$(3^x)' = 3^x\ln(3)$$

Magasabb rendű deriváltak

Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ valós függvény **másodrendű/második deriváltja** az $f'(x)$ függvény deriváltja (feltéve, hogy $f'(x)$ létezik).

Jelölés: $f''(x)$ vagy $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$.

Hasonlóan definiálhatjuk a harmad, negyed stb. n-ed rendű deriváltakat.

Jelölés: $f^{(n)}(x)$ vagy $\dfrac{d^n f}{dx^n}$.

Példák:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (\sin(x))' = \cos(x) \\
f''(x) &= (\cos(x))' = -\sin(x) \\
f'''(x) &= (-\sin(x))' = -\cos(x) \\
f^{(4)}(x) &= (-\cos(x))' = \sin(x) \\
f^{(5)}(x) &= (\sin(x))' = \cos(x) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= (x^3 - 2x^2 + 1)' = 3x^2 - 4x \\
g''(x) &= (3x^2 - 4x)' = 6x - 4 \\
g'''(x) &= (6x - 4)' = 6 \\
g^{(4)}(x) &= (6)' = 0 \\
g^{(5)}(x) &= (0)' = 0 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$