Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2023. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

11. előadás:
Derivált és monotonitás kapcsolata, Lokális és abszolút szélsőértékek, Szöveges szélsőértékfeladatok

Monotonitás

Az f függvény egy $I = (a, b) \subseteq D_f$ intervallumon

- **monoton nő**, ha $\forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
- **szigorúan monoton nő**, ha $\forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- **monoton csökken**, ha $\forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.
- **szigorúan monoton csökken**, ha
$$\forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$
- **monoton**, ha $f(x)$ az I-n monoton nő vagy monoton csökken.
- **szigorúan monoton**, ha $f(x)$ az I-n szigorúan monoton nő vagy szigorúan monoton csökken.

Monotonitás és derivált

Tétel: Ha az $f(x)$ függvény differenciálható és értelmezett az I intervallumon, akkor

- $f'(x) \geq 0$ minden $x \in I$-re $\Leftrightarrow$ f monoton nő az I intervallumon.
- $f'(x) \leq 0$ minden $x \in I$-re $\Leftrightarrow$ f monoton csökken az I intervallumon.

Tétel: Ha az $f(x)$ függvény differenciálható és értelmezett az I intervallumon, akkor

- $f'(x) > 0$ minden $x \in I$-re $\Rightarrow$ f szigorúan monoton nő az I intervallumon.
- $f'(x) < 0$ minden $x \in I$-re $\Rightarrow$ f szigorúan monoton csökken az I intervallumon.

Szigorú monotonitásra csak az egyik irányban igaz a következtetés:

Például $f(x) = x^3$ szigorúan monoton nő: $f'(x) = 3x^2 \geq 0$, de $f'(0) = 0$.

Példa

Mely intervallumokon monoton az $f(x) = e^x - x$ függvény?

Példa

Mely intervallumokon monoton az $f(x) = e^x - x$ függvény?
$f'(x) = e^x - 1$

$$\begin{aligned} f'(x) &\geq 0 \\ e^x - 1 &\geq 0 \\ e^x &\geq 1 \\ x &\geq 0, \end{aligned}$$

azaz az f függvény a $[0, +\infty)$ intervallumon monoton nő.

$$\begin{aligned} f'(x) &\leq 0 \\ e^x - 1 &\leq 0 \\ e^x &\leq 1 \\ x &\leq 0, \end{aligned}$$

azaz az f függvény a $(-\infty, 0]$ intervallumon monoton csökken.

Lokális szélsőérték

Definíció: Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ $(D_f \subseteq \mathbb{R})$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontja **lokális maximumhely**, ha van olyan $\delta > 0$, hogy $f(x) \leq f(x_0)$ minden $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ esetén. A **lokális maximum** az $f(x_0)$ függvényérték.

Definíció: Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ $(D_f \subseteq \mathbb{R})$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontja **lokális minimumhely**, ha van olyan $\delta > 0$, hogy $f(x) \geq f(x_0)$ minden $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ esetén. A **lokális minimum** az $f(x_0)$ függvényérték.

Lokális szélsőérték: lokális minimum vagy lokális maximum értéke, ami valamely értéke R_f-nek.

Lokális szélsőértékhely: lokális minimumhely vagy lokális maximumhely, valamely pontja D_f-nek.

Megjegyzés:

Nem tesszük fel, hogy a függvény differenciálható a pontban, ettől még lehet ott szélsőértéke.

Például: $f(x) = |x|$ függvény lokális minimuma van $x_0 = 0$-ban, de ott nem deriválható.

Lokális szélsőérték feltételei

Tétel (lokális szélsőérték **szükséges** feltétele): Ha az $f(x)$ függvénynek az x_0 pontban lokális szélsőértéke van, és az x_0-ban differenciálható a függvény, akkor $f'(x_0) = 0$.

Megjegyzés: Fordítva az $f'(x_0) = 0$-ból nem következik, hogy x_0-ban lokális szélsőérték van: például $f(x) = x^3$ függvény $x_0 = 0$ pontban.

Tovább vizsgálva a "lehetséges" szélsőértékhely környezetét:

Ha $f'(x_0) = 0$ és a függvény
$(x_0 - \delta, x_0)$-ban $f'(x) > 0$ (azaz f szig. mon. nő) és
$(x_0, x_0 + \delta)$-ban $f'(x) < 0$ (azaz f szig. mon. csökken),
akkor x_0-ban lokális maximum van.

Ha $f'(x_0) = 0$ és a függvény
$(x_0 - \delta, x_0)$-ban $f'(x) < 0$ (azaz f szig. mon. csökken) és
$(x_0, x_0 + \delta)$-ban $f'(x) > 0$ (azaz f szig. mon. nő),
akkor x_0-ban lokális minimum van.

Elégséges feltétel a lokális szélsőérték létezésére:
$f'(x_0) = 0$, és a függvényderivált előjelet vált.

Példa

Van-e lokális szélsőértéke az $f(x) = e^x - x$ függvénynek?

Példa

Van-e lokális szélsőértéke az $f(x) = e^x - x$ függvénynek?

$$f'(x) = e^x - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad e^x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x_0 = 0$$

azaz a függvénynek csak a 0 pontban lehet szélsőértéke.

Vizsgáljuk meg a derivált előjelét a 0 környezetében:

x	$x < 0$	0	$0 < x$
$f'(x)$	negatív $(e^x < 1)$	0	pozitív $(e^x > 1)$
$f(x)$	mon.csökk.	lok.min.	mon.nő

A derivált előjelet vált a 0-ban, negatívból pozitívba, tehát a függvény csökkenőből növekedőbe megy át, ezért az $x_0 = 0$ pont egy lokális minimumhelye a függvénynek.

A lokális minimum értéke: $f(0) = e^0 - 0 = 1$.

Elégséges feltétel lokális szélsőértékre

Ha az f függvény kétszer differenciálható, és $f'(x_0) = 0$, és

$f''(x_0) < 0$, akkor x_0-ban **lokális maximum** van
(f' pozitívból negatívba vált, azaz csökkenő).

$f''(x_0) > 0$, akkor x_0-ban **lokális minimum** van
(f' negatívból pozitívba vált, azaz növekvő).

Megjegyzés: ha $f''(x_0) = 0$ nem tudjuk, van-e szélsőérték

$f(x) = x^4$ függvénynek $x_0 = 0$-ban lokális minimuma van, de

$f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$, így $f''(0) = 0$.

Példa

Van-a lokális szélsőértéke az $f(x) = e^x - x$ függvénynek?

Példa

Van-a lokális szélsőértéke az $f(x) = e^x - x$ függvénynek?

$$f'(x) = e^x - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad e^x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x_0 = 0$$

azaz a függvénynek csak a 0 pontban lehet szélsőértéke.

Vizsgáljuk meg a második derivált előjelét a 0-ban:

$$f''(x) = e^x, \quad f''(0) = e^0 = 1 > 0$$

A második derivált szigorúan pozitív a 0-ban, ezért az $x_0 = 0$ pont egy lokális minimumhelye a függvénynek.

A lokális minimum értéke: $f(0) = e^0 - 0 = 1$.

Példa

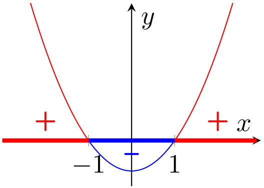
Keressük az $f(x) = x^3 - 3x$ függvény lokális szélsőértékei.

Példa

Keressük az $f(x) = x^3 - 3x$ függvény lokális szélsőértékei.

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 3x^2 - 3 &= 0 \\ x^2 &= 1 \\ x_{1,2} &= \mp 1 \end{aligned}$$



x	$(\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	mon.nő.	lok.max.	mon.csökk.	lok.min.	mon.nő

Az $x_1 = -1$-ben f' pozitívból negatívba vált $\Rightarrow$ ez lokális maximumhely,

a lokális maximum értéke: $f(x_1) = f(-1) = 2$.

Az $x_2 = +1$-ben f' negatívból pozitívba vált $\Rightarrow$ lokális minimumhely,

a lokális minimum értéke: $f(x_2) = f(1) = -2$.

Példa

Az $f(x) = x^3 - 3x$ függvény lokális szélsőértékei.

$f'(x) = 3x^2 - 3$, $\quad f'(x) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$ és $\quad f''(x) = 6x$.

Az $x_1 = -1$-ben $f''(x_1) = f''(-1) = -6 < 0$, $\Rightarrow$ lokális maximumhely,

a lokális maximum értéke: $f(x_1) = f(-1) = +2$.

Az $x_2 = +1$-ben $f''(x_2) = f''(+1) = +6 > 0$, $\Rightarrow$ ez lokális minimumhely,

a lokális minimum értéke: $f(x_2) = f(+1) = -2$.

Összefoglalás

Szükséges feltétel: x_0 lokális szélsőérték, akkor $f'(x_0) = 0$

Elsőrendű elégséges feltétel:

$f'(x_0) = 0$ és $(x_0 - \delta, x_0)$-ban $f'(x) < 0$,
$(x_0, x_0 + \delta)$-ban $f'(x) > 0$, akkor x_0 lokális minimumhely

$f'(x_0) = 0$ és $(x_0 - \delta, x_0)$-ban $f'(x) > 0$,
$(x_0, x_0 + \delta)$-ban $f'(x) < 0$, akkor x_0 lokális maximumhely

Másodrendű elégséges feltétel:

$f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) > 0$, akkor x_0 lokális minimumhely
$f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) < 0$, akkor x_0 lokális maximumhely

Globális/abszolút szélsőértékek

Definíció: Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontja **globális/abszolút maximumhely**, ha $f(x) \leq f(x_0)$ minden $x \in D_f$ esetén.

Definíció: Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in D_f$ pontja **globális/abszolút minimumhely**, ha $f(x) \geq f(x_0)$ minden $x \in D_f$ esetén.

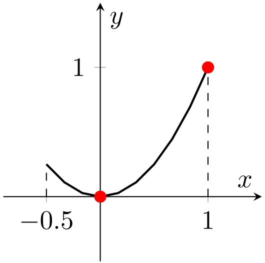
A globális minimum/maximum lehet lokális szélsőérték vagy az értelmezési tartomány szélén is.

Példa: (korlátos zárt intervallumon)

$f : [-0.5, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ függvény

globális minimuma $x = 0$-ban 0, és

globális maximuma $x = 1$-ben 1.



Korlátos zárt intervallumon

Példa:

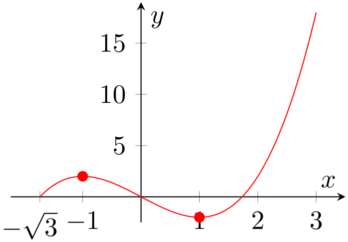
Keressük a globális szélsőértékeit: $f\colon\ \left[-\sqrt{3}, 3\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 3x.$

Korlátos zárt intervallumon

Példa:

Keressük a globális szélsőértékeit: $f : \left[-\sqrt{3}, 3\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$.

Lokális szélsőértékek: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$, azaz $x_{1,2} = \pm 1$-ben.



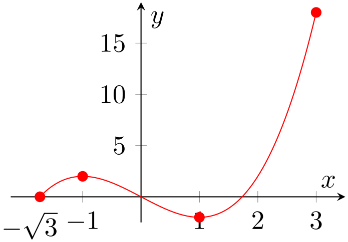
Lok. min.: $x_1 = 1$ pontban (-2). Lok. max.: $x_2 = -1$ pontban (2).

Korlátos zárt intervallumon

Példa:

Keressük a globális szélsőértékeit: $f\colon\ \left[-\sqrt{3}, 3\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 3x.$

Lokális szélsőértékek: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$, azaz $x_{1,2} = \pm 1$-ben.



Lok. min.: $x_1 = 1$ pontban (-2). Lok. max.: $x_2 = -1$ pontban (2).
Az intervallum szélein a függvény értéke:

$$f\left(-\sqrt{3}\right) = \left(-\sqrt{3}\right)^3 - 3\left(-\sqrt{3}\right) = 0 \text{ és } f(3) = 3^3 - 3\cdot 3 = 27 - 9 = 18$$

Így az abszolút minimumérték: -2 ($x = 1$-ben),
és az abszolút maximumérték: 18 ($x = 3$-ban).

Nem korlátos intervallum esete

Ha a függvény nem korlátos intervallumon van értelmezve, akkor határértéket kell számolni az intervallum szélén.

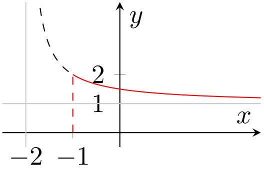
Nem korlátos intervallum esete

Ha a függvény nem korlátos intervallumon van értelmezve, akkor határértéket kell számolni az intervallum szélén.

Példa: Keressük a globális szélsőértékeit!

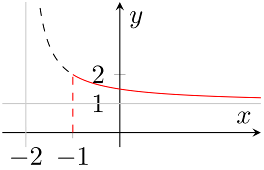
$$f : [-1, +\infty) \to \mathbb{R},$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x+2}$$



Nem korlátos intervallum esete

Ha a függvény nem korlátos intervallumon van értelmezve, akkor határértéket kell számolni az intervallum szélén.



Példa: Keressük a globális szélsőértékeit!

$$f\colon [-1,+\infty) \to \mathbb{R},$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x+2}$$

A lokális szélsőérték kereséséhez megnézzük a deriváltat: $f'(x) = \dfrac{-1}{(x+2)^2}$.

Ez nem lehet 0, tehát nincs lokális szélsőérték. Ugyanakkor az intervallumon a derivált mindenhol negatív, tehát a függvény szigorúan monoton csökkenő.

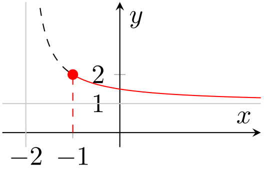
Nem korlátos intervallum esete

Ha a függvény nem korlátos intervallumon van értelmezve, akkor határértéket kell számolni az intervallum szélén.

Példa: Keressük a globális szélsőértékeit!

$$f\colon [-1,+\infty) \to \mathbb{R},$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x+2}$$



A lokális szélsőérték kereséséhez megnézzük a deriváltat: $f'(x) = \dfrac{-1}{(x+2)^2}$.

Ez nem lehet 0, tehát nincs lokális szélsőérték. Ugyanakkor az intervallumon a derivált mindenhol negatív, tehát a függvény szigorúan monoton csökkenő.

Az intervallum szélein:

$$f(-1) = 2 \quad \text{és} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 1.$$

Tehát a globális maximumérték 2 ($x = -1$-ben), míg globális minimum nincs, mert az 1-et nem veszi fel a függvény (ez a legnagyobb alsó korlát).

Nyílt intervallum esete

Ha a függvény nyílt intervallumon van értelmezve, akkor határértéket kell számolni az intervallum szélén.

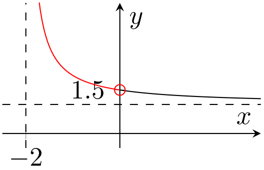
Nyílt intervallum esete

Ha a függvény nyílt intervallumon van értelmezve, akkor határértéket kell számolni az intervallum szélén.

Példa: Keressük a globális szélsőértékeit!

$$f\colon (-2,0) \to \mathbb{R},$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x+2}$$



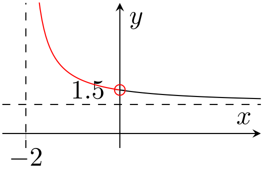
Nyílt intervallum esete

Ha a függvény nyílt intervallumon van értelmezve, akkor határértéket kell számolni az intervallum szélén.

Példa: Keressük a globális szélsőértékeit!

$$f\colon (-2,0) \to \mathbb{R},$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x+2}$$



A derivált: $f'(x) = \dfrac{-1}{(x+2)^2}$, nem lehet 0, tehát nincs lokális szélsőérték.

Ugyanakkor az intervallumon a derivált mindenhol negatív, tehát a függvény szigorúan monoton csökkenő.

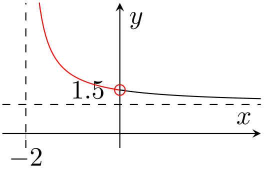
Nyílt intervallum esete

Ha a függvény nyílt intervallumon van értelmezve, akkor határértéket kell számolni az intervallum szélén.

Példa: Keressük a globális szélsőértékeit!

$$f\colon (-2,0) \to \mathbb{R},$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x+2}$$



A derivált: $f'(x) = \dfrac{-1}{(x+2)^2}$, nem lehet 0, tehát nincs lokális szélsőérték. Ugyanakkor az intervallumon a derivált mindenhol negatív, tehát a függvény szigorúan monoton csökkenő.

Az intervallum szélein:

$$\lim_{x\to -2+} f(x) = \infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 0-} f(x) = 3/2.$$

Tehát globális maximumérték nincs, mert a -2 jobb oldali környezetében nem korátos a függvény, míg globális minimuma sincs, mert a $3/2$-et nem veszi fel a függvény (ez a legnagyobb alsó korlát az intervallumon).

Szöveges feladat

Határozzuk meg annak a hengernek a magasságát és az alapköre sugarát, mely 1 liter térfogatú, felül nyitott, és a felszíne a lehető legkisebb!

Szöveges feladat

Határozzuk meg annak a hengernek a magasságát és az alapköre sugarát, mely 1 liter térfogatú, felül nyitott, és a felszíne a lehető legkisebb!

Ha a henger alapjának a sugara r, és a magassága m, akkor a térfogata $r^2\pi m$, melynek 1-nek kell lennie (feltéve, hogy deciméterben mérjük a hosszakat):

$$r^2\pi m = 1,$$

ebből kifejezhetjük a magasságot:

$$m = \frac{1}{r^2\pi}.$$

A felszín nagysága, felhasználva a magasság kifejezését:

$$A = r^2\pi + 2\pi r m = r^2\pi + 2\pi r \frac{1}{r^2\pi} = r^2\pi + \frac{2}{r}.$$

Ennek az r-től függő kifejezésnek keressük a minimumát, ha $r > 0$, azaz az $r \in (0, \infty)$ nyílt, nem korlátos intervallumon.

Szöveges feladat – folytatás

Így az

$$A(r) = r^2\pi + \frac{2}{r}$$

kifejezés minimumát keressük $r \in (0, \infty)$-re.

Szöveges feladat – folytatás

Így az

$$A(r) = r^2\pi + \frac{2}{r}$$

kifejezés minimumát keressük $r \in (0, \infty)$-re.

Először lokális szélsőértékeket keresünk:

$$A'(r) = 2r\pi - \frac{2}{r^2},$$

ami ha 0, akkor $2r_0\pi = \frac{2}{r_0^2}$, azaz $r_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$.

A második derivált értéke:

$$A''(r) = 2\pi - (-2)\frac{2}{r^3} = 2\pi + \frac{4}{r^3},$$

ami az r_0 helyen:

$$A''(r_0) = A''\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}\right) = 2\pi + \frac{4}{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^3} = 2\pi + 4\pi = 6\pi > 0,$$

így ez valóban lokális minimum.

Szöveges feladat – folytatás

Mivel az $A(r)$ az $r \in (0, +\infty)$ esetén értelmes, ezen intervallum határain vizsgáljuk a határértékeket:

$$\lim_{r\to 0+} A(r) = \lim_{r\to 0+} r^2\pi + \frac{2}{r} = \infty$$

$$\lim_{r\to \infty} A(r) = \lim_{r\to \infty} r^2\pi + \frac{2}{r} = \infty$$

Tehát az $r_0 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$ pontban globális minimum van.

Ugyanerre az eredményre juthatunk, ha meggondoljuk, hogy az A függvény a $(0, r_0)$ intervallumban monoton csökken, míg az $(r_0, +\infty)$ intervallumban monoton nő.

Ebben az esetben a henger magassága:

$$m_0 = \frac{1}{r_0^2\pi} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^2 \pi} = \frac{1}{\pi^{1-\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$$