Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2023. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

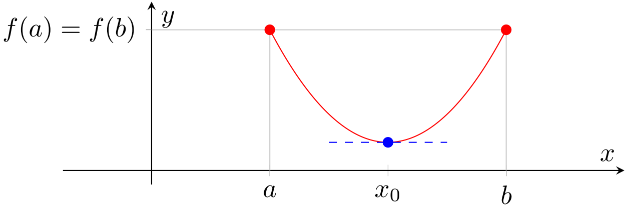
13. előadás:
Középértéktételek, L'Hospital-szabály

Rolle-tétel

Tétel: Ha az $f(x)$ függvény az $[a, b]$ intervallumon folytonos, és az (a, b) intervallumon differenciálható, és $f(a) = f(b)$, akkor van olyan $x_0 \in (a, b)$, hogy $f'(x_0) = 0$ (az érintő vízszintes).

Bizonyítás:

A Weierstrass-tétel szerint a függvény felveszi a minimumát és a maximumát, ezek közül legalább az egyik belső pont. Ez lokális szélsőérték, így a derivált ott nulla.



Lagrange-tétel

Tétel: Ha az $f(x)$ függvény az $[a, b]$ intervallumon folytonos, és az (a, b) intervallumon differenciálható, akkor van olyan $x_0 \in (a, b)$, hogy

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

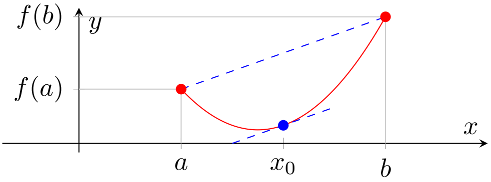
azaz létezik olyan érintő, mely a grafikondarab végpontjait összekötő szakasszal párhuzamos.

Bizonyítás: A Rolle-tételt alkalmazzuk a következő függvényre

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Ekkor $F(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b - a) = f(a) = F(a)$. Így létezik $x_0 \in (a, b)$

$$F'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Cauchy-tétel

Tétel: Ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvények az $[a,b]$ intervallumon folytonosak, az (a,b)-n differenciálhatóak és $g'(x)\neq 0$ bármely $x\in(a,b)$ esetén, akkor van olyan $x_0\in(a,b)$, hogy

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Bizonyítás: A Rolle-tételt alkalmazzuk az

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)$$

függvényre, mivel

$$F(b)-F(a)=f(b)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left(g(b)-g(a)\right)=0,$$

tehát $F(b)=F(a)$. Ekkor létezik $x_0\in(a,b)$, hogy

$$F'(x_0)=f'(x_0)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x_0)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

L'Hospital-szabály

Bernoulli–L'Hospital-szabály a $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ határérték kiszámítására.

Tétel: Az $f(x)$ és $g(x)$ függvények differenciálhatóak az x_0 egy nyílt környezetében (esetleg x_0-ban nem). Tegyük fel, hogy ebben a környezetben $g'(x) \neq 0$ ha $x \neq x_0$. Ekkor, ha

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

vagy

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \text{ és } \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty,$$

és létezik a $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, akkor $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ is létezik és "A"-val egyenlő.

Megjegyzés 1.: Az "A" valós szám vagy $\pm\infty$ is lehet.

Megjegyzés 2.: Az x_0-ban féloldali vagy a $\pm\infty$-ben is számolhatunk így határértéket.

L'Hospital-szabály

Bizonyítás: Abban az esetben, ha

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0.$$

Legyen $x \in (x_0-\delta, x_0)$ (azaz $x < x_0$), és ha x_0-ban f vagy g nem folytonosak, értelmezzük a függvényeket úgy, hogy

$$f(x_0) := \lim_{x\to x_0-} f(x) = 0 \quad \text{és} \quad g(x_0) := \lim_{x\to x_0-} g(x) = 0.$$

Ekkor már f és g folytonosak x_0-ban is, tehát $[x, x_0]$-on is.
Mivel f folytonos $[x, x_0]$ zárt intervallumon és diffható (x, x_0)-ban, ezért a Cauchy-tételt felhasználva létezik $\xi \in (x, x_0)$, hogy

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \underset{\substack{f(x_0)=0\\ \text{és}\\ g(x_0)=0}}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} \underset{\substack{x\to x_0\\ \text{akkor}\\ \xi\to x_0}}{=} \lim_{\xi\to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Ha $x > x_0$ hasonlóan.

Példa

Mennyi a $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ határérték?

Ekkor, ha

$$f(x) = e^x - 1 \quad \text{és} \quad g(x) = x,$$

akkor a 0-ban

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0.$$

A deriváltak

$$f'(x) = e^x \quad \text{és} \quad g'(x) = 1.$$

Így

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Ezért alkalmazhatjuk a L'Hospital- szabály

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Megjegyzés

Csak akkor működik a szabály, ha a $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték létezik.

Ha nem létezik, attól még a $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ létezhet, például:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x} = ?$$

$$\lim_{x\to\infty}(x+\sin x)=\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x\to\infty} x=\infty.$$

$$f(x) = x+\sin x, \qquad g(x) = x,$$
$$f'(x) = 1+\cos x, \qquad g'(x) = 1.$$

Tehát $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} 1+\cos x$, ami nem létezik.

De $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} 1+\dfrac{\sin x}{x} = 1+0=1.$

Többszöri alkalmazás

Többször is alkalmazhatjuk a tételt:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} \rightsquigarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} \rightsquigarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)} \rightsquigarrow \cdots = A$$

Példa: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - x - 1}{x^2} = ?$

Többszöri alkalmazás

Többször is alkalmazhatjuk a tételt:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} \rightsquigarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} \rightsquigarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)} \rightsquigarrow \cdots = A$$

Példa: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x^2}=?$

$$\lim_{x\to 0} e^x-x-1=e^0-0-1=0 \quad \text{és} \quad \lim_{x\to 0}x^2=0$$

$$\begin{aligned} f(x)&=e^x-x-1 & g(x)&=x^2\\ f'(x)&=e^x-1 & g'(x)&=2x\\ f''(x)&=e^x & g''(x)&=2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}=\frac{"0"}{0} \rightsquigarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{"0"}{0} \rightsquigarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2},$$

tehát $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

Példák

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} =$$

Példák

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{"0"}{0}$ típusú, alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} \rightsquigarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{2x} \rightsquigarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{2} = \dfrac{1}{2}$,

tehát $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

Példák

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{"0"}{0}$$ típusú, alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \rightsquigarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} \rightsquigarrow \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2},$$

tehát $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}.$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^n}{e^x} \underset{n\in\mathbb{Z}^+}{=}$$

Példák

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{"0"}{0}$$ típusú, alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \rightsquigarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} \rightsquigarrow \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2},$$

tehát $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^n}{e^x} \underset{n\in\mathbb{Z}^+}{=} \frac{"\infty"}{\infty}$$ típusú, alkalmazhatjuk a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^n}{e^x} \rightsquigarrow \lim_{x\to \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow \lim_{x\to \infty} \frac{n(n-1)\ldots 2\cdot 1}{e^x} = \frac{n!}{\infty} = 0,$$

tehát $\lim_{x\to \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$.

Más kritikus esetek, ahol a L'Hospital-szabály alkalmazható

Ha nem tört határértékét szeretnénk megállapítani, akkor is megpróbálkozhatunk törtté alakítani. Például:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \text{”}0\cdot\infty\text{”} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

Például

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot e^{-2x} = \text{”}\infty\cdot 0\text{”} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{2x}} = \frac{\text{”}\infty\text{”}}{\infty} \rightsquigarrow \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{2x}\cdot 2} = 0.$$

Vagy

$$\lim_{x\to 0+} x\cdot \ln(x) = \text{”}0\cdot -\infty\text{”} = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \frac{\text{”}-\infty\text{”}}{\infty} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} -x = 0.$$

Más kritikus esetek, ahol a L'Hospital-szabály alkalmazható

Ha nem tört határértékét szeretnénk megállapítani, akkor is megpróbálkozhatunk törtté alakítani. Például két tört különbsége a közös nevezőre való hozás után már egy tört:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)} = "\infty - \infty" = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-f(x)}{f(x)g(x)}$$

$$\lim_{x\to 1+} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} = "\infty - \infty" = \lim_{x\to 1+} \frac{\ln(x)-x+1}{(x-1)\ln(x)} = \frac{"0"}{0} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \lim_{x\to 1+} \frac{\frac{1}{x}-1}{\ln(x)+\frac{(x-1)}{x}} = \lim_{x\to 1+} \frac{1-x}{x\ln(x)+x-1} = \frac{"0"}{0} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \lim_{x\to 1+} \frac{-1}{\ln(x)+x\frac{1}{x}+1} = -\frac{1}{2}$$

FONTOS

A tört deriválása és a L'Hospital-szabály két különböző dolog!

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

és

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \rightsquigarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Nem szabad összekeverni!