# Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2023. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

# 14. előadás: Teljes függvényvizsgálat
# Implicit és paraméteres görbék deriváltja

# Függvényvizsgálat

Adott egy $f(x)$ függvény, megállapítjuk:

1. értelmezési tartomány
2. zérushely
3. globális tul.: paritás, periodicitás
4. értelmezési tartomány szélein határértékek
   - aszimptoták
5. első derivált
   - monotonitási tulajdonságok
   - lokális szélsőértékek
6. második derivált
   - konvexitás
   - inflexiós pontok
7. sematikus ábra
8. értékkészlet

# Az $e^{-x^2}$ függvény vizsgálata

Legyen $f(x) = e^{-x^2}$ (Gauss- vagy haranggörbe).

# Az $e^{-x^2}$ függvény vizsgálata

Legyen $f(x) = e^{-x^2}$ (Gauss- vagy haranggörbe).

1. értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$
2. zérushely: nincs, mindenütt pozitív
3. paritás: $f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$, tehát páros
   periodicitás: nem periodikus
4. értelmezési tartomány szélein határértékek:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{-x^2} = 0, \text{ mert } \lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x^2} = \lim_{x\to-\infty} e^{-x^2} = 0 \quad \text{(páros függvény)}$$

Így vízszintes aszimptota is van a $\pm\infty$-ben: $y = 0$ egyenes.

# Az $e^{-x^2}$ függvény vizsgálata – folytatás

5. első derivált: $f'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x)$, melynek $0$-ban van nullhelye

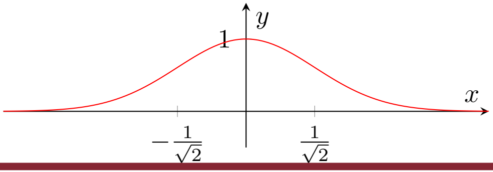
| | $x < 0$ | $0$ | $0 < x$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f$ | sz.m.nő | lok. max. | sz.m.csökken |

Az $x = 0$-ban lokális maximum van, melynek értéke: $f(0) = e^0 = 1$.

6. második derivált: $f''(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x)^2 + e^{-x^2} \cdot (-2) = (4x^2 - 2)\, e^{-x^2}$,
melynek nullhelyei: $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

| | $x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}} < x$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f$ | konvex | infl.pont | konkáv | infl.pont | konvex |

7.




8. értékkészlet: $(0, 1]$

# $f(x) = x^3 - 3x - 2$ teljes függvényvizsgálata

# $f(x) = x^3 - 3x - 2$ teljes függvényvizsgálata

1. értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$

2. zérushely: racionális gyökök csak a $2$ osztói lehetnek: $\pm 1, \pm 2$, melyek közül $2$ és a $-1$ gyök, utóbbi kétszeres. Így a függvény szorzat alakja: $f(x) = x^3 - 3x - 2 = (x+1)^2(x-2)$

3. paritás: $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) - 2 = -x^3 + 3x - 2 = -f(x) - 4$, tehát (valószínűleg) nincs paritása,

   hivatkozhatunk a nullhelyekre is (nem szimmetrikusak az origóra), vagy

   $f(1) = -4$ és $f(-1) = 0$ se nem egyenlőek, se nem ellentettek.

   periodicitás: nem periodikus (véges sok nullhely)

# $f(x) = x^3 - 3x - 2$ teljes függvényvizsgálata

4. értelmezési tartomány szélein határértékek:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^3 - 3x - 2 = \lim_{x\to\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 - 3x - 2 = \lim_{x\to-\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = -\infty$$

Ferde aszimptota van-e?

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 3x - 2}{x} = \lim_{x\to\infty} x^2 - 3 - \frac{2}{x} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} x^2 \left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = +\infty,$$

így nincs ferde aszimptota a $+\infty$-ben.
Hasonló számolással kapjuk, hogy a $-\infty$-ben sincsen.

## $f(x) = x^3 - 3x - 2$ teljes függvényvizsgálata

5. első derivált: $f'(x) = 3x^2 - 3$,

   melynek $x^2 = 1$ esetén, azaz $\pm 1$-ben van nullhelye

| | $(-\infty, -1)$ | $-1$ | $(-1, 1)$ | $1$ | $(1, +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f$ | sz.m.nő | lok.max. | sz.m.csökken | lok.min. | sz.m.nő |

   Tehát a $-1$ lokális maximumhely, értéke: $f(-1) = 0$,

   míg az $1$ lokális minimumhely, értéke: $f(1) = -4$.

6. második derivált: $f''(x) = 3 \cdot 2x = 6x$, melynek nullhelye a $0$.

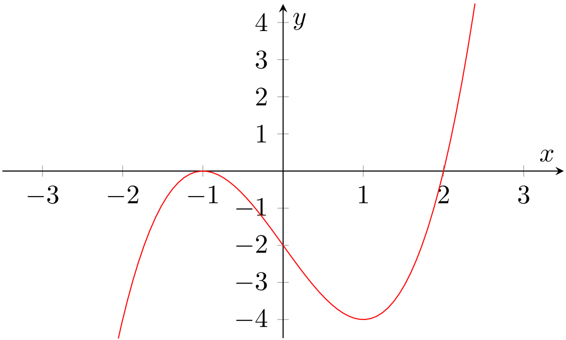
| | $(-\infty, 0)$ | $0$ | $(0, +\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f''$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f$ | konkáv | infl. pont | konvex |

## $f(x) = x^3 - 3x - 2$ teljes függvényvizsgálata

Egy táblázatban:

| | $(-\infty, -1)$ | $-1$ | $(-1, 0)$ | $0$ | $(0, 1)$ | $1$ | $(1, +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $+$ sz.m.nő | $0$ lok.max. | $-$ sz.m.csökken | | | $0$ lok.min | $+$ sz.m.nő |
| $f''$ | $-$ konkáv | | | $0$ infl.pont | $+$ konvex | | |

7.




8. értékkészlet: $\mathbb{R}$

## $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2}$ teljes függvényvizsgálata

## $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2}$ teljes függvényvizsgálata

1. értelmezési tartomány: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
2. zérushely: $x^3 + 1 = 0$ esetén, azaz $x = -1$.
3. paritás: nincsen, hiszen ha lenne, akkor $1$ is nullhely lenne.

   periodicitás: nem periodikus (csak egy nullhely)
4. értelmezési tartomány szélein határértékek:

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{x^3+1}{x^2} = +\infty$$
$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} \frac{x^3+1}{x^2} = +\infty$$

   Tehát az $x = 0$-ban függőleges aszimptota van.

# $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2}$ teljes függvényvizsgálata

4. értelmezési tartomány szélein határértékek (folytatás):

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{x^2} = \lim_{x\to\infty} x + \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+1}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} x + \frac{1}{x^2} = -\infty$$

Ferde aszimptota van-e?

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3+1}{x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{x^3} = \lim_{x\to\infty} 1 + \frac{1}{x^3} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} \left( \frac{x^3+1}{x^2} - x \right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1-x^3}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

így az $y = x$ egyenletű egyenes a ferde aszimptota a $+\infty$-ben.
Hasonló számolással kapjuk, hogy a $-\infty$-ben is az $y = x$ egyenletű egyenes a ferde aszimptota.

## $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2}$ teljes függvényvizsgálata

5. első derivált:
$$f'(x)=\frac{3x^2\cdot x^2-(x^3+1)2x}{(x^2)^2}=\frac{3x^4-2x^4-2x}{(x^2)^2}=\frac{x^3-2}{x^3},$$
melynek $\sqrt[3]{2}$-ben van nullhelye.

| | $(-\infty,0)$ | $0$ | $(0,\sqrt[3]{2})$ | $\sqrt[3]{2}$ | $(\sqrt[3]{2},+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $+$ | n. é. | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f$ | $\nearrow$ | n. é. | $\searrow$ | lok.min. | $\nearrow$ |

Tehát a $\sqrt[3]{2}$ lokális min.hely, értéke: $f\left(\sqrt[3]{2}\right)=\dfrac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3+1}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}\approx 1{,}89.$

6. második: $f''(x)=\dfrac{3x^2\cdot x^3-(x^3-2)3x^2}{(x^3)^2}=\dfrac{3x^5-(3x^5-6x^2)}{x^6}=\dfrac{6}{x^4},$
melynek nincs nullhelye.

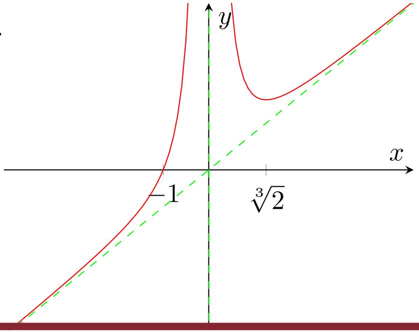
| | $(-\infty,0)$ | $0$ | $(0,+\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f''$ | $+$ | n. é. | $+$ |
| $f$ | $\smile$ | n. é. | $\smile$ |

## $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2}$ teljes függvényvizsgálata

Az előzőek egyetlen táblázatban:

| | $(-\infty,0)$ | $(0,\sqrt[3]{2})$ | $\sqrt[3]{2}$ | $(\sqrt[3]{2},+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $+$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f$ | $\nearrow$ | $\searrow$ | lok.min. | $\nearrow$ |
| $f''$ | $+$ | | $+$ | |
| $f$ | $\smile$ | | $\smile$ | |

7.




8. értékkészlet: $\mathbb{R}$

## $f(x) = x - \operatorname{arctg}(x)$ teljes függvényvizsgálata

## $f(x) = x - \operatorname{arctg}(x)$ teljes függvényvizsgálata

1. értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$

2. zérushely: $x = 0$-ban zérus a függvény, más nullhely nincs, mert látni fogjuk, hogy szigorúan monoton nő.

3. paritás: páratlan (felhasználva, hogy az arctg függvény páratlan):
   $f(-x) = -x - \operatorname{arctg}(-x) = -x - (-\operatorname{arctg}(x)) = -f(x)$

   periodicitás: nem periodikus (csak egy zérushely)

4. értelmezési tartomány szélein határértékek:

$$\lim_{x\to+\infty} x - \operatorname{arctg}(x) = +\infty \text{ (mert az } \operatorname{arctg} \text{ függvény korlátos)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} x - \operatorname{arctg}(x) = -\infty \text{ (mert az } \operatorname{arctg} \text{ függvény korlátos)}$$

aszimptoták (ferde aszimptoták lehetnek):

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x - \operatorname{arctg}(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} 1 - \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} f(x) - ax = \lim_{x\to\infty} x - \operatorname{arctg}(x) - x = \lim_{x\to\infty} -\operatorname{arctg}(x) = -\frac{\pi}{2}$$

Tehát az aszimptota egyenlete a $+\infty$-ben $y = x - \frac{\pi}{2}$.

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x - \operatorname{arctg}(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} 1 - \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} f(x) - ax = \lim_{x\to-\infty} x - \operatorname{arctg}(x) - x = \lim_{x\to-\infty} -\operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2}$$

Tehát az aszimptota egyenlete a $-\infty$-ben $y = x + \frac{\pi}{2}$.

## $f(x) = x - \operatorname{arctg}(x)$ teljes függvényvizsgálata

5.-6. első és második derivált:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$$

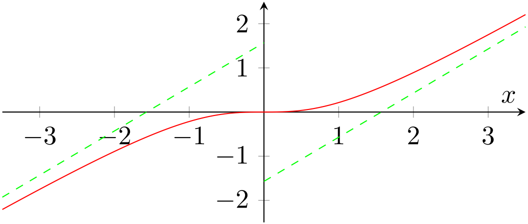
$$f''(x) = \frac{2x(1+x^2) - x^2 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2x+2x^3-2x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

| | $x<0$ | $0$ | $0<x$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | $+$ | $0$ | $+$ |
| $f$ | sz.m. nő | $-$ | sz.m. nő |

| | $x<0$ | $0$ | $0<x$ |
|---|---|---|---|
| $f''$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f$ | konkáv | infl. | konvex |

A $0$-ban nincs lokális szélsőérték, a függvény monoton nő $\mathbb{R}$-en, de inflexiós pont azonban van.

7.




8. értékkészlet $\mathbb{R}$.

# Implicit módon megadott görbék

A koordináta rendszer görbéi megadhatóak olyan $(x, y)$ pontok halmazaként, melyekre teljesül egy megadott $F(x, y) = 0$ egyenlet. Az így definiált göbéket **implicit módon megadott görbéknek** nevezzük. (A függvényként definiált grafikongörbék $y = f(x)$ hozzárendelési szabályát **explicit megadásnak** nevezzük.)

$$\mathcal{G} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, F(x, y) = 0\right\}.$$

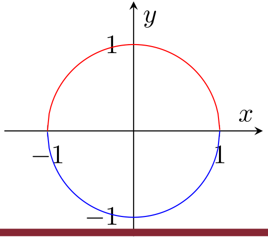
Például az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletet kielégítő $x$ és $y$ koordinátájú pontok halmaza egy origó középpontú, $1$ sugrú kör:

$$\mathcal{K} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 - 1 = 0\right\}.$$

Ez a görbe, mint függvény csak két darabban adható meg

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad D_f = [-1, 1]$$

$$g(x) = -\sqrt{1 - x^2}, \quad D_f = [-1, 1]$$



# Implicit görbe érintője

Az implicit módon adott görbe érintőjét egy adott $P(x_0, y_0)$ pontban a meredeksége: $\dfrac{dy}{dx}$ kiszámításával tudjuk megadni. Ekkor a görbe teljes $F(x,y) = 0$ egyenletét deriváljuk.

$$F(x,y) = 0 \qquad / \cdot \frac{d}{dx}$$

$$\frac{dF}{dx}(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

itt $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ olyan, hogy az $y$ változót, mint konstanst tekintjük, hasonlóan $\dfrac{\partial F}{\partial y}$-nál $x$-et. Ekkor

$$\frac{dy}{dx}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

adódik az érintő meredekségére, ha $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Így az érintőegyenes egyenlete $P$-ben $\qquad y = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}(x - x_0) + y_0.$

# Implicit görbe érintője

HA $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$, akkor az érintőegyenest a következő alakban adhatjuk meg

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = -\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0).$$

Azaz

$$0 = -\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0),$$

$$x = x_0$$

függőleges érintő adódik.

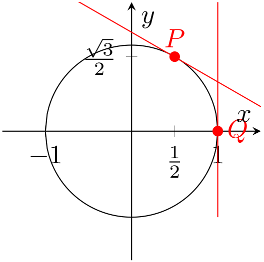
## Példa

Az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletet kielégítő $x$ és $y$ koordinátájú pontok halmaza egy origó középpontú, $1$ sugrú kör, írjuk fel az érintőjét a $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ pontban.

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad / \cdot \frac{d}{dx}$$

$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}\bigg|_P = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$




Az érintő egyenese $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

A $Q(1,0)$ pontban az érintő függőleges, $\frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = 0$ eltűnik, így az érintő

$$0 \cdot (y - 0) = -2(x - 1)$$
$$x = 1.$$

# Paraméteresen adott síkgörbék

A paraméteresen megadott síkgörbék olyan ponthalmazok, melyek koordinátapárjai két függvény, $x(t)$ és $y(t)$ segítségével vannak megadva. Ezek egy $t \in [a, b]$ paraméterintervallum felett vannak definiálva.

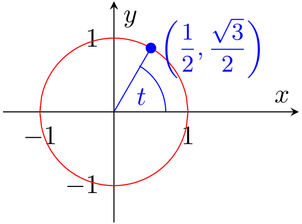
$$\mathcal{G} = \left\{ (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, t \in [a, b] \right\}.$$

Például az $x(t) = \cos(t)$ és $y(t) = \sin(t)$ koordinátájú pontok halmaza egy origó középpontú, $1$ sugrú kör, ha $t \in [0, 2\pi]$

$$\mathcal{K} = \left\{ (\cos(t), \sin(t)) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, t \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Minden $t$ paraméterértékhez pontosan egy görbepont tartozik.

Például: $t_0 = \dfrac{\pi}{3}$, akkor $x_0 = \dfrac{1}{2}$, $y_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



# Paraméteresen adott görbe érintője

Számítsuk ki az $(x(t), y(t))$ görbe $t_0$ paraméterértékhez tartozó pontjába húzott érintő meredekségét.

$$\left.\frac{dy(t)}{dx(t)}\right|_{t_0} = \frac{dy}{dt} \cdot \left.\frac{dt}{dx}\right|_{t_0} = \dot{y}(t_0)\frac{1}{\dot{x}(t_0)}, \quad \text{ahol } \dot{x}(t_0) \neq 0.$$

A kör $t_0 = \frac{\pi}{3}$ paraméterértékhez tartozó $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ pontjában

$$\dot{x}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \dot{y}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

Így az érintő egyenlete

$$y = \frac{1/2}{-\sqrt{3}/2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

# Paraméteresen adott görbe érintője

Az $x(t) = \cos^3(t)$ és $y(t) = \sin^3(t)$ koordinátájú pontok halmaza egy origó középpontú asztrois, melynek az $x$- és $y$-tegelyekkel egybeesnek a szimmetriatengelyei, $t \in [0, 2\pi]$.

Az asztrois $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$ paraméterértékhez tartozó $P\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ pontjában

$$\dot{x}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -3\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3}{2\sqrt{2}}, \quad \dot{y}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

Így az érintő egyenlete itt

$$y = -1\left(x - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$