Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2023. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

15. előádás: Primitív függvény, határozatlan integrál, alapintegrálok, műveleti tételek, egyszerű helyettesítés módszere

Primitív függvény

Definíció: Az $F(x)$ függvény az $f(x)$ függvény **primitív függvénye** az $I \subseteq D_f$ nyílt intervallumon, ha ott F deriválható és $F'(x) = f(x)$ teljesül minden $x \in I$-re.

Általában a megfelelő nagybetűvel jelöljük a primitív függvényt.

Példa:

$f(x) = 3x^2$ esetén $F(x) = x^3$ jó

vagy

$F(x) = x^3 + 1$ esetén $F'(x) = (x^3 + 1)' = 3x^2 + 0$,

sőt bármilyen $c \in \mathbb{R}$-re $F(x) = x^3 + c$ jó

$$F'(x) = (x^3 + c)' = 3x^2 + 0 = f(x).$$

Primitív függvény

Tétel: Ha $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$ az I intervallumon, akkor van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy $F_1(x) = F_2(x) + c$. Azaz a primitív függvény konstans erejéig egyértelmű.

Tekintsük az $f(x)$ függvény primitív függvényeinek halmazát az $I \subseteq D_f$ intervallumon

$$\mathcal{F} = \{F(x) \mid F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I\}.$$

Ezt a függvényhalmazt f **határozatlan integráljának** nevezzük az I intervallumon.

Jelölése:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Példa:

$$\int 3x^2\,\mathrm{d}x = \left\{x^3 + c \mid c \in \mathbb{R}\right\} = x^3 + c.$$

Folytonosság és integrálhatóság

Tétel: Ha az $f(x)$ függvény folytonos, akkor van primitív függvénye.

Indolkás később.

Habár a folytonosság elégséges feltétele a primitív függvény létezésének, ez nem jelenti azt, hogy elemi függvények segítségével felírható a primitív függvény.

Például az $f(x) = e^{-x^2}$ függvénynek van primitív függvénye, hiszen folytonos, de nem tudjuk felírni az általunk ismert függvényekkel.

Műveleti tulajdonságok

Tétel:

$$\int f(x) + g(x) \,\mathrm{d}x = \int f(x) \,\mathrm{d}x + \int g(x) \,\mathrm{d}x$$

$$\int f(x) - g(x) \,\mathrm{d}x = \int f(x) \,\mathrm{d}x - \int g(x) \,\mathrm{d}x$$

$$\int c f(x) \,\mathrm{d}x = c \int f(x) \,\mathrm{d}x \qquad c \in \mathbb{R}$$

A deriválási szabályok megfordításából következnek.

Elemi függvények integráljai

Mivel $(x)' = 1$, így $\int 1 \, \mathrm{d}x = x + c$.

$(x^n)' = nx^{n-1}$, így

$$\int nx^{n-1} \, \mathrm{d}x = x^n + c$$

$$\int x^{n-1} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n} x^n + c, \qquad \text{ha } n \neq 0$$

$$\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c, \qquad \text{ha } n \neq -1$$

Tudjuk, hogy $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$, ha $x > 0$, így

$$\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln(x) + c, \qquad \text{ha } x > 0$$

$$\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln|x| + c, \qquad \text{ha } x \neq 0$$

Elemi függvények integráljai – táblázat

f	$\int f \,\mathrm{d}x$	
x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$n \neq -1$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$	$x \neq 0$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$	
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$	
e^x	$e^x + c$	
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x) + c$	
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x) + c$	
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arctg}(x) + c$	
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + c$	$\lvert x\rvert < 1$

Példák

$$\int x^3 + 4x^2 - 5 \, \mathrm{d}x =$$

Példák

$$\int x^3 + 4x^2 - 5\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} - 5x + c = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 5x + c$$

Példák

$$\int x^3 + 4x^2 - 5 \,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} - 5x + c = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 5x + c$$

$$\int x^2 \sqrt{x} \,\mathrm{d}x =$$

Példák

$$\int x^3 + 4x^2 - 5\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} - 5x + c = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 5x + c$$

$$\int x^2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + c = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + c = \frac{2}{7}\sqrt{x^7} + c$$

Példák

$$\int x^3 + 4x^2 - 5 \,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} - 5x + c = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 5x + c$$

$$\int x^2\sqrt{x} \,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{5}{2}} \,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + c = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + c = \frac{2}{7}\sqrt{x^7} + c$$

$$\int 3\sin(x) + \sqrt{\frac{2}{1+x^2}} \,\mathrm{d}x =$$

Példák

$$\int x^3 + 4x^2 - 5\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} - 5x + c = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 5x + c$$

$$\int x^2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + c = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + c = \frac{2}{7}\sqrt{x^7} + c$$

$$\int 3\sin(x) + \sqrt{\frac{2}{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \int 3\sin(x) + \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= -3\cos(x) + \sqrt{2}\,\mathrm{arsh}(x) + c$$

Feladat

Határozzuk meg azt az $f(x)$ függvényt, melyre

$f'(x) = \cos(x)$ és $f(0) = 5.$

Feladat

Határozzuk meg azt az $f(x)$ függvényt, melyre

$f'(x) = \cos(x)$ és $f(0) = 5.$

$$f'(x) = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = \sin(x) + c$$

$$f(0) = \sin(0) + c = 5 \quad \Rightarrow \quad c = 5$$

$$f(x) = \sin(x) + 5$$

Feladat

Határozzuk meg azt az $f(x)$ függvényt, melyre

$$f''(x) = x \quad \text{és} \quad f'(2) = 1 \quad \text{és} \quad f(1) = 0.$$

Feladat

Határozzuk meg azt az $f(x)$ függvényt, melyre

$$f''(x) = x \quad \text{és} \quad f'(2) = 1 \quad \text{és} \quad f(1) = 0.$$

$$f''(x) = x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$f'(2) = \frac{2^2}{2} + c_1 = 2 + c_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -1$$

$$f'(x) = \frac{x^2}{2} - 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - x + c_2 = \frac{x^3}{6} - x + c_2$$

$$f(1) = \frac{1}{6} - 1 + c_2 = -\frac{5}{6} + c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{5}{6}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{6} - x + \frac{5}{6}$$

Első helyettesítési szabály - a láncszabály megfordítása

Tétel (Egyszerű helyettesítés): Ha az $f(x)$ függvény primitív függvénye $F(x)$, akkor

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = F(g(x)) + c.$$

Bizonyítás:

$$(F(g(x)) + c)' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Első helyettesítési szabály - a láncszabály megfordítása

Tétel (Egyszerű helyettesítés): Ha az $f(x)$ függvény primitív függvénye $F(x)$, akkor

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = F(g(x)) + c.$$

Bizonyítás:

$$(F(g(x)) + c)' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Példa:

$$\int \sin(5x - 7)\,\mathrm{d}x =$$

Első helyettesítési szabály - a láncszabály megfordítása

Tétel (Egyszerű helyettesítés): Ha az $f(x)$ függvény primitív függvénye $F(x)$, akkor

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = F(g(x)) + c.$$

Bizonyítás:

$$(F(g(x)) + c)' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Példa:

$$\int \sin(5x-7)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int \sin(5x-7) \cdot 5\,\mathrm{d}x =$$

Első helyettesítési szabály - a láncszabály megfordítása

Tétel (Egyszerű helyettesítés): Ha az $f(x)$ függvény primitív függvénye $F(x)$, akkor

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = F(g(x)) + c.$$

Bizonyítás:

$$(F(g(x)) + c)' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Példa:

$$\int \sin(5x-7)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int \sin(5x-7)\cdot 5\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{\cos(5x-7)}{5} + c,$$

ahol $\quad f(x) = \sin(x), \quad F(x) = -\cos(x), \quad g(x) = 5x-7, \quad g'(x) = 5.$

Példák

$$\int \cos(2x)\,\mathrm{d}x =$$

Példák

$$\int \cos(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(2x)}{2} + c,$$

Példák

$$\int \cos(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(2x)}{2} + c,$$

$$\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x =$$

Példák

$$\int \cos(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(2x)}{2} + c,$$

$$\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + c$$

Példák

$$\int \cos(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(2x)}{2} + c,$$

$$\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + c$$

$$\int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x =$$

Példák

$$\int \cos(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(2x)}{2} + c,$$

$$\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + c$$

$$\int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x = \ln|x-2| + c$$

Példák

$$\int \cos(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(2x)}{2} + c,$$

$$\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + c$$

$$\int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x = \ln|x-2| + c$$

$$\int \frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x =$$

Példák

$$\int \cos(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(2x)}{2} + c,$$

$$\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + c$$

$$\int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x = \ln|x-2| + c$$

$$\int \frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x-2} + c$$

Példák

$$\int \cos(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(2x)}{2} + c,$$

$$\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + c$$

$$\int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x = \ln|x-2| + c$$

$$\int \frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x-2} + c$$

$$\int (2x-3)^{100}\,\mathrm{d}x =$$

Példák

$$\int \cos(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(2x)}{2} + c,$$

$$\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + c$$

$$\int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x = \ln|x-2| + c$$

$$\int \frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x-2} + c$$

$$\int (2x-3)^{100}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-3)^{101}}{101} + c = \frac{(2x-3)^{101}}{202} + c$$

$$\boxed{\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{F(ax+b)}{a} + c.}$$

Példák - Általában

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x =$$

Példák - Általában

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = \int 2 \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = 2e^{\sqrt{x}} + c$$

ahol $\quad g(x) = \sqrt{x},\ g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ f(x) = e^x,\ F(x) = e^x$

$$\int \mathrm{tg}(x) \, \mathrm{d}x =$$

Példák - Általában

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int 2 \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2e^{\sqrt{x}} + c$$

ahol $g(x) = \sqrt{x},\ g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ f(x) = e^x,\ F(x) = e^x$

$$\int \operatorname{tg}(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos(x)} \cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos(x)| + c$$

Példák - Általában

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int 2\cdot e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2e^{\sqrt{x}} + c$$

ahol $g(x) = \sqrt{x},\ g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ f(x) = e^x,\ F(x) = e^x$

$$\int \operatorname{tg}(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos(x)}\cdot\sin(x)\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos(x)| + c$$

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x =$$

Példák - Általában

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = \int 2 \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = 2e^{\sqrt{x}} + c$$

ahol $g(x) = \sqrt{x}$, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f(x) = e^x$, $F(x) = e^x$

$$\int \operatorname{tg}(x) \, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos(x)} \cdot \sin(x) \, \mathrm{d}x = -\ln|\cos(x)| + c$$

$$\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} \, \mathrm{d}x = \operatorname{arctg}(e^x) + c$$

Példák - Általában

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int 2 \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2e^{\sqrt{x}} + c$$

ahol $g(x) = \sqrt{x},\ g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ f(x) = e^x,\ F(x) = e^x$

$$\int \mathrm{tg}(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos(x)} \cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos(x)| + c$$

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{arctg}(e^x) + c$$

$$\int \cos^3(x)\,\mathrm{d}x =$$

Példák - Általában

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int 2\cdot e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2e^{\sqrt{x}} + c$$

ahol $g(x)=\sqrt{x},\ g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\ f(x)=e^x,\ F(x)=e^x$

$$\int \mathrm{tg}(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos(x)}\cdot\sin(x)\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos(x)| + c$$

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{arctg}(e^x) + c$$

$$\int \cos^3(x)\,\mathrm{d}x = \int (1-\sin^2(x))\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \cos(x)\,\mathrm{d}x - \int \sin^2(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3} + c$$

$$\boxed{\int f(g(x))\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = F(g(x)) + c.}$$