Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2023. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

16. előadás: Parciális integrálás, Teljes helyettesítés

Parciális integrálás

A szorzatra vonatkozó deriválási szabály:

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = (f(x)g(x))'.$$

Integrálva az egyenlet mindkét oldalát

$$\int f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) + c.$$

Átrendezve az egyenletet

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ezt nevezzük **parciális integrálásnak**.

Példa:

$$\int \underbrace{x}_{f}\underbrace{\cos(x)}_{g'}\,\mathrm{d}x = \underbrace{x\sin(x)}_{f\cdot g} - \int \underbrace{\sin(x)}_{f'\cdot g}\,\mathrm{d}x = x\sin(x) + \cos(x) + c$$

ahol $f(x) = x$, $f'(x) = 1$ illetve $g'(x) = \cos(x)$, $g(x) = \sin(x)$.

Többszörös alkalmazás

$$\int \underbrace{x^2}_{f} \underbrace{e^{3x}}_{g'} \, \mathrm{d}x =$$

Többszörös alkalmazás

$$\int \underbrace{x^2}_{f} \underbrace{e^{3x}}_{g'} \,\mathrm{d}x = \underbrace{x^2 \frac{e^{3x}}{3}}_{fg} - \int \underbrace{2x \frac{e^{3x}}{3}}_{f'g} \,\mathrm{d}x =$$

ahol $\quad f(x) = x^2,\ f'(x) = 2x \quad$ és $\quad g'(x) = e^{3x},\ g(x) = \dfrac{e^{3x}}{3},$

Többszörös alkalmazás

$$\int \underbrace{x^2}_{f} \underbrace{e^{3x}}_{g'} \, \mathrm{d}x = \underbrace{x^2 \frac{e^{3x}}{3}}_{fg} - \int \underbrace{2x \frac{e^{3x}}{3}}_{f'g} \, \mathrm{d}x =$$

ahol $f(x) = x^2, \; f'(x) = 2x$ és $g'(x) = e^{3x}, \; g(x) = \frac{e^{3x}}{3}$,

$$= \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3} \int \underbrace{x}_{f} \underbrace{e^{3x}}_{g'} \, \mathrm{d}x = \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3} \underbrace{\left(x \frac{e^{3x}}{3} \right)}_{fg} + \frac{2}{3} \int \underbrace{1 \cdot \frac{e^{3x}}{3}}_{f'g} \, \mathrm{d}x =$$

ahol $f(x) = x, \; f'(x) = 1$ és $g'(x) = e^{3x}, \; g(x) = \frac{e^{3x}}{3}$,

Többszörös alkalmazás

$$\int \underbrace{x^2}_{f} \underbrace{e^{3x}}_{g'} \,\mathrm{d}x = \underbrace{x^2 \frac{e^{3x}}{3}}_{fg} - \int \underbrace{2x \frac{e^{3x}}{3}}_{f'g} \,\mathrm{d}x =$$

ahol $f(x) = x^2,\ f'(x) = 2x$ és $g'(x) = e^{3x},\ g(x) = \frac{e^{3x}}{3}$,

$$= \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3} \int \underbrace{x}_{f} \underbrace{e^{3x}}_{g'} \,\mathrm{d}x = \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3} \underbrace{\left(x \frac{e^{3x}}{3} \right)}_{fg} + \frac{2}{3} \int \underbrace{1 \cdot \frac{e^{3x}}{3}}_{f'g} \,\mathrm{d}x =$$

ahol $f(x) = x,\ f'(x) = 1$ és $g'(x) = e^{3x},\ g(x) = \frac{e^{3x}}{3}$,

$$= \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2x e^{3x}}{9} + \frac{2e^{3x}}{27} + c.$$

Integrálegyenlet rendezése

$$\int \underbrace{e^x}_{g'} \underbrace{\sin(2x)}_{f} \, \mathrm{d}x = e^x \sin(2x) - \int 2e^x \cos(2x) \, \mathrm{d}x =$$

ahol $\quad f(x) = \sin(2x), \; f'(x) = 2\cos(2x) \quad$ és $\quad g'(x) = e^x, \; g(x) = e^x$

$$= e^x \sin(2x) - 2 \int \underbrace{e^x}_{g'} \underbrace{\cos(2x)}_{f} \, \mathrm{d}x = e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x) - 4 \int e^x \sin(2x) \, \mathrm{d}x$$

ahol $\quad f(x) = \cos(2x), \; f'(x) = -2\sin(2x) \quad$ és $\quad g'(x) = e^x, \; g(x) = e^x$

Integrálegyenlet rendezése

$$\int \underbrace{e^x}_{g'} \underbrace{\sin(2x)}_{f} \,\mathrm{d}x = e^x \sin(2x) - \int 2e^x \cos(2x)\,\mathrm{d}x =$$

ahol $f(x) = \sin(2x),\ f'(x) = 2\cos(2x)$ és $g'(x) = e^x,\ g(x) = e^x$

$$= e^x \sin(2x) - 2\int \underbrace{e^x}_{g'} \underbrace{\cos(2x)}_{f} \,\mathrm{d}x = e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x) - 4\int e^x \sin(2x)\,\mathrm{d}x$$

ahol $f(x) = \cos(2x),\ f'(x) = -2\sin(2x)$ és $g'(x) = e^x,\ g(x) = e^x$

Így a teljes egyenletet rendezve

$$\int e^x \sin(2x)\,\mathrm{d}x = e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x) - 4\int e^x \sin(2x)\,\mathrm{d}x$$

$$5\int e^x \sin(2x)\,\mathrm{d}x = e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x) + c$$

$$\int e^x \sin(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}e^x \sin(2x) - \frac{2}{5}e^x \cos(2x) + c$$

Parciális integrálás és az inverz függvények

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x =$$

Parciális integrálás és az inverz függvények

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - \int \frac{1}{x}x\,\mathrm{d}x =$$

ahol $f(x) = \ln(x), \quad f'(x) = \dfrac{1}{x}$ és $g'(x) = 1, \quad g(x) = x$

$$= x\ln(x) - \int 1\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - x + c.$$

Parciális integrálás és az inverz függvények

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - \int \frac{1}{x}x\,\mathrm{d}x =$$

ahol $f(x) = \ln(x), \quad f'(x) = \dfrac{1}{x}$ és $g'(x) = 1, \quad g(x) = x$

$$= x\ln(x) - \int 1\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - x + c.$$

$$\int \operatorname{arctg}(x)\,\mathrm{d}x =$$

Parciális integrálás és az inverz függvények

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - \int \frac{1}{x}x\,\mathrm{d}x =$$

ahol $f(x) = \ln(x), \quad f'(x) = \dfrac{1}{x}$ és $g'(x) = 1, \quad g(x) = x$

$$= x\ln(x) - \int 1\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - x + c.$$

$$\int \mathrm{arctg}(x)\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{arctg}(x) - \int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x =$$

ahol $f(x) = \mathrm{arctg}(x),\ f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ és $g'(x) = 1,\ g(x) = x$

$$= x\,\mathrm{arctg}(x) - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{arctg}(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c.$$

Teljes helyettesítés - Bevezető példa

A feladatban az összetett függvény mellett nem jelenik meg a belső függvény deriváltja, például:

$$\int \sin\left(\sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}x$$

Ekkor új változót vezetünk be $t = \sqrt{x}$, és a régi változót kifejezzük az újjal $t^2 = x$. Lederiválva az egyenletet

$$2t = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},$$

így kifejezhető $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$, tehát

$$\int \sin\left(\sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}x \underset{\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t}{=} \int \sin(t)\,2t\,\mathrm{d}t = 2\int t\sin(t)\,\mathrm{d}t$$

Ezt az integrált már parciális integrálással ki tudjuk számítani

$$2\int t\,\sin(t)\,\mathrm{d}t = 2t(-\cos(t)) - 2\int -\cos(t)\,\mathrm{d}t = -2t\,\cos(t) + 2\sin(t) + c,$$

ahol $f(t) = t,\ f'(t) = 1$ és $g'(t) = \sin(t),\ g(t) = -\cos(t)$

A végeredménybe még az eredeti változót vissza kell írni:

$$\int \sin\left(\sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}x = -2t\,\cos(t) + 2\sin(t) + c = -2\sqrt{x}\,\cos\left(\sqrt{x}\right) + 2\sin\left(\sqrt{x}\right) + c.$$

Teljes helyettesítés - Általában

- A feladatban az összetett függvény mellett nem jelenik meg a belső függvény deriváltja, ezért alkalmas új változót jelölünk ki, és a régi változót kifejezzük az újjal $g(t) = x$.
- Lederiválva az egyenletet

$$g'(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},$$

így kifejezhető $\mathrm{d}x = g'(t)\,\mathrm{d}t$.

- Változócserét hajtunk végre az integrálon

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(g(t))\,g'(t)\ \mathrm{d}t.$$

- A végeredménybe visszaírjuk az eredeti változót.

Példa

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x =$$

Példa

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^2}{1+t}\frac{1}{t}\;\mathrm{d}t = \int \frac{t}{1+t}\;\mathrm{d}t =$$

$t = e^x \rightsquigarrow x = \ln(t)$, így $g(t) = \ln(t)$, melynek deriváltja: $g'(t) = \dfrac{1}{t}$

$$= \int \frac{1+t-1}{1+t}\;\mathrm{d}t = \int 1 - \frac{1}{1+t}\;\mathrm{d}t = t - \ln|1+t| + c =$$

Végül visszaírjuk az eredeti változót:

$$= e^x - \ln\left(1+e^x\right) + c$$

Példa - helyettesítés trigonometrikus és hyperbolikus függvényekkel

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Példa - helyettesítés trigonometrikus és hyperbolikus függvényekkel

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos(t)}\cos(t)\ \mathrm{d}t = \int 1\,\mathrm{d}t = t + c = \arcsin(x) + c$$

$$x = \sin(t) \rightsquigarrow t = \arcsin(x), \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \cos(t) \rightsquigarrow \mathrm{d}x = \cos(t)\ \mathrm{d}t,$$

$$\sqrt{1-\sin^2(t)} = \cos(t)$$

Példa - helyettesítés trigonometrikus és hyperbolikus függvényekkel

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos(t)}\cos(t)\ \mathrm{d}t = \int 1\,\mathrm{d}t = t + c = \arcsin(x) + c$$

$x = \sin(t) \rightsquigarrow t = \arcsin(x), \quad \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \cos(t) \rightsquigarrow \mathrm{d}x = \cos(t)\ \mathrm{d}t,$

$\sqrt{1-\sin^2(t)} = \cos(t)$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Példa - helyettesítés trigonometrikus és hyperbolikus függvényekkel

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos(t)}\cos(t)\ \mathrm{d}t = \int 1\,\mathrm{d}t = t + c = \arcsin(x) + c$$

$$x = \sin(t) \rightsquigarrow t = \arcsin(x), \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \cos(t) \rightsquigarrow \mathrm{d}x = \cos(t)\ \mathrm{d}t,$$

$$\sqrt{1-\sin^2(t)} = \cos(t)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}\mathrm{ch}(t)\ \mathrm{d}t = \int 1\,\mathrm{d}t = t + c = \mathrm{arsh}(x) + c$$

$$x = \mathrm{sh}(t),\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mathrm{ch}(t) \rightsquigarrow \mathrm{d}x = \mathrm{ch}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \sqrt{1+\mathrm{sh}^2(t)} = \mathrm{ch}(t)$$

Ezeket a deriváltak táblázatából is ismerjük...

Példa - helyettesítés trigonometrikus és hyperbolikus függvényekkel

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+4}}\,\mathrm{d}x$$

Példa - helyettesítés trigonometrikus és hyperbolikus függvényekkel

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+4}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+3}}\,\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}}\,\mathrm{d}x =$$

$$\frac{x+1}{\sqrt{3}} = \mathrm{sh}(t) \rightsquigarrow x = \sqrt{3}\,\mathrm{sh}(t) - 1, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{3}\,\mathrm{ch}(t) \rightsquigarrow \mathrm{d}x = \sqrt{3}\,\mathrm{ch}(t)\ \mathrm{d}t,$$

mivel $\sqrt{\mathrm{sh}^2(t)+1} = \mathrm{ch}(t)$,

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\mathrm{ch}(t)} \sqrt{3}\,\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \sqrt{3}\,\mathrm{d}t = t + c =$$

visszaírva $t = \mathrm{arsh}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)$

$$= \mathrm{arsh}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + c.$$

(egyszerű helyettesítéssel is ment volna)