Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2023. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

17. előďás: Parciális törtekre bontás

Parciális törtekre bontás - Racionális tört függvények integrálása

Két polinom hányadosát szeretnénk integrálni

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0}\,\mathrm{d}x.$$

Az ilyen típusú függvények integrálására van általános módszer.

Parciális törtekre bontás - Racionális tört függvények integrálása

Két polinom hányadosát szeretnénk integrálni

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0}\,\mathrm{d}x.$$

Az ilyen típusú függvények integrálására van általános módszer.

1. Polinomosztással elérjük, hogy a számláló kisebb fokú legyen, mint a nevező. Ha $p(x) = (c_{n-m}x^{n-m} + \ldots + c_1 x + c_0) \cdot q(x) + r(x)$

   $$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x = \int c_{n-m}x^{n-m} + \ldots + c_1 x + c_0\,\mathrm{d}x + \int \frac{r(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x,$$

   ahol $\deg r(x) < \deg q(x)$. Az osztás eredménye polinom, amit külön integrálhatunk. Az $\dfrac{r(x)}{q(x)}$ törtet tovább alakítjuk integrálható résztörtekké.

Példa

$$\int \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 5}{x - 2} \, \mathrm{d}x = ?$$

Példa

$$\int \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 5}{x - 2}\, \mathrm{d}x = ?$$

$$x^3 \quad - \quad 4x^2 \quad + \quad 3x \quad + \quad 5 \quad : (x-2) =$$

Példa

$$\int \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 5}{x - 2}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\begin{array}{ccccccccl} x^3 & - & 4x^2 & + & 3x & + & 5 & : (x-2) = (\, x^2 \\ x^3 & - & 2x^2 & & & & & \\ \hline \end{array}$$

Példa

$$\int \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 5}{x - 2}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
x^3 & - & 4x^2 & + & 3x & + & 5 & : (x-2) = (\, x^2 \\
x^3 & - & 2x^2 & & & & & \\
\hline
 & - & 2x^2 & + & 3x & + & 5 &
\end{array}$$

Példa

$$\int \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 5}{x - 2}\, \mathrm{d}x = ?$$

$$\begin{array}{ccccccccl}
x^3 & - & 4x^2 & + & 3x & + & 5 & : (x-2) = (x^2 - 2x \\
x^3 & - & 2x^2 & & & & & \\
\hline
 & - & 2x^2 & + & 3x & + & 5 & \\
 & - & 2x^2 & + & 4x & & & \\
\cline{2-7}
\end{array}$$

Példa

$$\int \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 5}{x - 2}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
x^3 & - & 4x^2 & + & 3x & + & 5 & : (x-2) = (\,x^2 - 2x \\
x^3 & - & 2x^2 & & & & & \\
\hline
 & - & 2x^2 & + & 3x & + & 5 & \\
 & - & 2x^2 & + & 4x & & & \\
\cline{2-7}
 & & & - & x & + & 5 &
\end{array}$$

Példa

$$\int \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 5}{x - 2}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
x^3 & - & 4x^2 & + & 3x & + & 5 & : (x-2) = (\,x^2 - 2x - 1\,) \\
x^3 & - & 2x^2 & & & & & \\
\hline
 & - & 2x^2 & + & 3x & + & 5 & \\
 & - & 2x^2 & + & 4x & & & \\
\cline{2-7}
 & & & - & x & + & 5 & \\
 & & & - & x & + & 2 & \\
\cline{4-7}
\end{array}$$

Példa

$$\int \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 5}{x - 2}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
x^3 & - & 4x^2 & + & 3x & + & 5 & : (x-2) = (\,x^2 - 2x - 1\,) \\
x^3 & - & 2x^2 & & & & & \\
\hline
 & - & 2x^2 & + & 3x & + & 5 & \\
 & - & 2x^2 & + & 4x & & & \\
\cline{2-7}
 & & & - & x & + & 5 & \\
 & & & - & x & + & 2 & \\
\cline{4-7}
 & & & & & & 3 &
\end{array}$$

Példa

$$\int \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 5}{x - 2}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
x^3 & - & 4x^2 & + & 3x & + & 5 & :(x-2) = (\,x^2 - 2x - 1\,) \\
x^3 & - & 2x^2 & & & & & \\
\hline
 & - & 2x^2 & + & 3x & + & 5 & \\
 & - & 2x^2 & + & 4x & & & \\
\cline{2-7}
 & & & - & x & + & 5 & \\
 & & & - & x & + & 2 & \\
\cline{4-7}
 & & & & & & 3 &
\end{array}$$

Példa

$$\int \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 5}{x-2}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
x^3 & - & 4x^2 & + & 3x & + & 5 & : (x-2) = (\,x^2 - 2x - 1\,) \\
x^3 & - & 2x^2 & & & & & \\
\hline
 & - & 2x^2 & + & 3x & + & 5 & \\
 & - & 2x^2 & + & 4x & & & \\
\hline
 & & & - & x & + & 5 & \\
 & & & - & x & + & 2 & \\
\hline
 & & & & & & 3 &
\end{array}$$

$$\int \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 5}{x-2}\,\mathrm{d}x = \int x^2 - 2x - 1\,\mathrm{d}x + \int \frac{3}{x-2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^3}{3} - x^2 - x + \int \frac{3}{x-2}\,\mathrm{d}x$$

Parciális törtekre bontás - Racionális tört függvények integrálása

2. A nevezőt felbontjuk legfeljebb másodfokú irreducibilis polinomok szorzatára.

$$\int \frac{r(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{r(x)}{b_m \cdot (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\dots(x^2+\beta x+\gamma)^l\dots}\,\mathrm{d}x$$

Itt $\alpha_1, \alpha_2,$ a számláló $k_1, k_2, \dots$-szeres gyökei.

Parciális törtekre bontás - Racionális tört függvények integrálása

2. A nevezőt felbontjuk legfeljebb másodfokú irreducibilis polinomok szorzatára.

$$\int \frac{r(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{r(x)}{b_m \cdot (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\dots(x^2+\beta x+\gamma)^l\dots}\,\mathrm{d}x$$

Itt $\alpha_1, \alpha_2,$ a számláló $k_1, k_2, \dots$-szeres gyökei.

3. A törtet felírjuk egyszerűbb törtek összegeként. Minden "α" k-szoros gyökhöz

$$\frac{A_1}{(x-\alpha)} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \dots \frac{A_k}{(x-\alpha)^k}$$

résztörteket vesszük, minden $(x^2+\beta x+\gamma)^l$ irreducibilis l-szeres másodfokú tényezőre

$$\frac{B_1 x + C_1}{(x^2+\beta x+\gamma)} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2+\beta x+\gamma)^2} + \dots \frac{B_l x + C_l}{(x^2+\beta x+\gamma)^l}$$

Ezeket a törteket már tudjuk integrálni.

Előző példa befejezése

$$\int \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 5}{x - 2} \, \mathrm{d}x = ?$$

Előző példa befejezése

$$\int \frac{x^3-4x^2+3x+5}{x-2}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\int \frac{x^3-4x^2+3x+5}{x-2}\,\mathrm{d}x = \int x^2-2x-1\,\mathrm{d}x + \int \frac{3}{x-2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^3}{3} - x^2 - x + \int \frac{3}{x-2}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{3}{x-2}\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x = 3\int \underbrace{\frac{A}{(x-\alpha)^k}}_{\alpha=2,\,k=1,\,A=1}\,\mathrm{d}x = 3\ln|x-2|+c$$

$$\int \frac{x^3-4x^2+3x+5}{x-2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - x^2 - x + 3\ln|x-2|+c$$

Példa

Legyen $f(x) = \dfrac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2+1)}$,

Példa

Legyen $f(x) = \dfrac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2+1)}$, a nevező szorzatalakja alapján a résztörtek

$$x^2 = \underbrace{(x-\alpha)^k}_{\alpha=0,\, k=2} : \qquad \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2},$$

Példa

Legyen $f(x) = \dfrac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2+1)}$, a nevező szorzatalakja alapján a résztörtek

$$x^2 = \underbrace{(x-\alpha)^k}_{\alpha=0,\, k=2}: \quad \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2}, \qquad (x^2+1) = \underbrace{(x^2+\beta x+\gamma)^l}_{\beta=0, \gamma=1,\, l=1}: \quad \frac{Bx+C}{x^2+1},$$

Példa

Legyen $f(x) = \dfrac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2+1)}$, a nevező szorzatalakja alapján a résztörtek

$$x^2 = \underbrace{(x-\alpha)^k}_{\alpha=0,\, k=2} : \quad \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2}, \qquad (x^2+1) = \underbrace{(x^2+\beta x+\gamma)^l}_{\beta=0, \gamma=1,\, l=1} : \quad \frac{Bx+C}{x^2+1},$$

így a teljes törtet a résztörtek összegével tesszük egyenlővé

$$\frac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} =$$

Példa

Legyen $f(x) = \dfrac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2+1)}$, a nevező szorzatalakja alapján a résztörtek

$$x^2 = \underbrace{(x-\alpha)^k}_{\alpha=0,\, k=2} : \quad \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2}, \qquad (x^2+1) = \underbrace{(x^2+\beta x+\gamma)^l}_{\beta=0, \gamma=1,\, l=1} : \quad \frac{Bx+C}{x^2+1},$$

így a teljes törtet a résztörtek összegével tesszük egyenlővé

$$\frac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} =$$

$$= \frac{A_1 x(x^2+1) + A_2(x^2+1) + (Bx+C)x^2}{x^2(x^2+1)} = \frac{A_1(x^3+x) + A_2(x^2+1) + Bx^3 + Cx^2}{x^2(x^2+1)} =$$

$$= \frac{(A_1+B)x^3 + (A_2+C)x^2 + A_1 x + A_2}{x^2(x^2+1)}$$

Példa

Legyen $f(x) = \dfrac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2+1)}$, a nevező szorzatalakja alapján a résztörtek

$$x^2 = \underbrace{(x-\alpha)^k}_{\alpha=0,\, k=2}: \quad \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2}, \qquad (x^2+1) = \underbrace{(x^2+\beta x+\gamma)^l}_{\beta=0, \gamma=1,\, l=1}: \quad \frac{Bx+C}{x^2+1},$$

így a teljes törtet a résztörtek összegével tesszük egyenlővé

$$\frac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} =$$

$$= \frac{A_1 x(x^2+1) + A_2(x^2+1) + (Bx+C)x^2}{x^2(x^2+1)} = \frac{A_1(x^3+x) + A_2(x^2+1) + Bx^3 + Cx^2}{x^2(x^2+1)} =$$

$$= \frac{(A_1+B)x^3 + (A_2+C)x^2 + A_1 x + A_2}{x^2(x^2+1)}$$

A közös nevező megegyezik $f(x)$ nevezőjével, így a számlálókat egyeztetve

$$1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 - 1 \cdot x - 2 = (A_1 + B)x^3 + (A_2 + C)x^2 + A_1 x + A_2$$

Példa

Legyen $f(x) = \dfrac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2+1)}$, a nevező szorzatalakja alapján a résztörtek

$$x^2 = \underbrace{(x-\alpha)^k}_{\alpha=0,\, k=2} : \quad \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2}, \qquad (x^2+1) = \underbrace{(x^2+\beta x+\gamma)^l}_{\beta=0, \gamma=1,\, l=1} : \quad \frac{Bx+C}{x^2+1},$$

így a teljes törtet a résztörtek összegével tesszük egyenlővé

$$\frac{x^3-x-2}{x^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} =$$

$$= \frac{A_1x(x^2+1) + A_2(x^2+1) + (Bx+C)x^2}{x^2(x^2+1)} = \frac{A_1(x^3+x) + A_2(x^2+1) + Bx^3 + Cx^2}{x^2(x^2+1)} =$$

$$= \frac{(A_1+B)x^3 + (A_2+C)x^2 + A_1x + A_2}{x^2(x^2+1)}$$

A közös nevező megegyezik $f(x)$ nevezőjével, így a számlálókat egyeztetve

$$1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 - 1 \cdot x - 2 = (A_1+B)x^3 + (A_2+C)x^2 + A_1x + A_2 \qquad \text{azaz}$$

$$A_1 + B = 1, \quad A_2 + C = 0, \quad A_1 = -1, \quad A_2 = -2 \quad \longrightarrow \quad B = 2, \quad C = 2.$$

Példa

Ha $A_1 = -1, \quad A_2 = -2, \quad B = 2, \quad C = 2,$

akkor $f(x) = \dfrac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2+1)} = \dfrac{A_1}{x} + \dfrac{A_2}{x^2} + \dfrac{Bx + C}{x^2+1} = -\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{2x+2}{x^2+1}.$

Példa

Ha $A_1 = -1, \quad A_2 = -2, \quad B = 2, \quad C = 2,$

akkor $f(x) = \dfrac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2+1)} = \dfrac{A_1}{x} + \dfrac{A_2}{x^2} + \dfrac{Bx + C}{x^2+1} = -\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{2x+2}{x^2+1}.$

Így integrálhatjuk a résztörteket

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \int -\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2x+2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x =$$

Példa

Ha $A_1 = -1, \quad A_2 = -2, \quad B = 2, \quad C = 2,$

akkor $f(x) = \dfrac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2+1)} = \dfrac{A_1}{x} + \dfrac{A_2}{x^2} + \dfrac{Bx + C}{x^2+1} = -\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{2x+2}{x^2+1}.$

Így integrálhatjuk a résztörteket

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \int -\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2x+2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x =$$

Példa

Ha $A_1 = -1, \quad A_2 = -2, \quad B = 2, \quad C = 2,$

akkor $f(x) = \dfrac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2+1)} = \dfrac{A_1}{x} + \dfrac{A_2}{x^2} + \dfrac{Bx + C}{x^2+1} = -\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{2x+2}{x^2+1}.$

Így integrálhatjuk a résztörteket

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \int -\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2x+2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\ln|x|$$

Példa

Ha $A_1 = -1, \quad A_2 = -2, \quad B = 2, \quad C = 2,$

akkor $f(x) = \dfrac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2+1)} = \dfrac{A_1}{x} + \dfrac{A_2}{x^2} + \dfrac{Bx + C}{x^2+1} = -\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{2x+2}{x^2+1}.$

Így integrálhatjuk a résztörteket

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \int -\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2x+2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\ln|x| \; - \; 2\frac{x^{-1}}{-1}$$

Példa

Ha $A_1 = -1, \quad A_2 = -2, \quad B = 2, \quad C = 2,$

akkor $f(x) = \dfrac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2+1)} = \dfrac{A_1}{x} + \dfrac{A_2}{x^2} + \dfrac{Bx + C}{x^2+1} = -\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{2x+2}{x^2+1}.$

Így integrálhatjuk a résztörteket

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \int -\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2x+2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\ln|x| \; - \; 2\frac{x^{-1}}{-1} \; + \; \ln\left|x^2+1\right|$$

Példa

Ha $A_1 = -1, \quad A_2 = -2, \quad B = 2, \quad C = 2,$

akkor $f(x) = \dfrac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2+1)} = \dfrac{A_1}{x} + \dfrac{A_2}{x^2} + \dfrac{Bx + C}{x^2+1} = -\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{2x+2}{x^2+1}.$

Így integrálhatjuk a résztörteket

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^3 - x - 2}{x^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \int -\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2x+2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\ln|x| \; - \; 2\frac{x^{-1}}{-1} \; + \; \ln\left|x^2+1\right| \; + \; 2\mathrm{arctg}(x) \; + \; c.$$

4. Integráljuk a résztörteket. A különböző résztörtekre vonatkozó integrálási tecnikák segítségével:

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)}\,\mathrm{d}x = A\ln|x-\alpha| + c,$$

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^k}\,\mathrm{d}x \underset{k>1}{=} A\frac{(x-\alpha)^{-k+1}}{-k+1} + c = A\frac{1-k}{(x-\alpha)^{k-1}} + c,$$

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)}\,\mathrm{d}x = \frac{B}{2}\int \frac{2x+\beta}{(x^2+\beta x+\gamma)}\,\mathrm{d}x + \int \frac{C^*}{\underbrace{(x+\beta/2)^2+\gamma^*}_{\text{teljes négyzet}}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{B}{2}\ln\left|x^2+\beta x+\gamma\right| + \frac{C^*}{\sqrt{\gamma^*}} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x+\beta/2}{\sqrt{\gamma^*}}\right) + c$$

$$\Uparrow$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \arctan(x) + c \quad \text{alapján}$$

Példák

$$\int \frac{5}{x-2}\,\mathrm{d}x = 5\ln|x-2| + c$$

Példák

$$\int \frac{5}{x-2}\,\mathrm{d}x = 5\ln|x-2| + c$$

$$\int \frac{5}{(x-2)^4}\,\mathrm{d}x = 5\int (x-2)^{-4}\,\mathrm{d}x = 5\frac{(x-2)^{-3}}{-3} + c = -\frac{5}{3}\frac{1}{(x-2)^3} + c$$

Példák

$$\int \frac{5}{x-2}\,\mathrm{d}x = 5\ln|x-2| + c$$

$$\int \frac{5}{(x-2)^4}\,\mathrm{d}x = 5\int (x-2)^{-4}\,\mathrm{d}x = 5\frac{(x-2)^{-3}}{-3} + c = -\frac{5}{3}\frac{1}{(x-2)^3} + c$$

$$\int \frac{2x-4}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x \quad \text{irreducibilis másodfokú nevező: } D = \sqrt{4-8}$$

Példák

$$\int \frac{5}{x-2}\,\mathrm{d}x = 5\ln|x-2| + c$$

$$\int \frac{5}{(x-2)^4}\,\mathrm{d}x = 5\int (x-2)^{-4}\,\mathrm{d}x = 5\frac{(x-2)^{-3}}{-3} + c = -\frac{5}{3}\frac{1}{(x-2)^3} + c$$

$$\int \frac{2x-4}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x$$ irreducibilis másodfokú nevező: $D = \sqrt{4-8}$

$$\frac{2x-4}{x^2-2x+2} = \frac{2x-2}{x^2-2x+2} + \frac{-2}{(x-1)^2+1},$$ így

Példák

$$\int \frac{5}{x-2}\,\mathrm{d}x = 5\ln|x-2| + c$$

$$\int \frac{5}{(x-2)^4}\,\mathrm{d}x = 5\int (x-2)^{-4}\,\mathrm{d}x = 5\frac{(x-2)^{-3}}{-3} + c = -\frac{5}{3}\frac{1}{(x-2)^3} + c$$

$$\int \frac{2x-4}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x$$ irreducibilis másodfokú nevező: $D = \sqrt{4-8}$

$$\frac{2x-4}{x^2-2x+2} = \frac{2x-2}{x^2-2x+2} + \frac{-2}{(x-1)^2+1},$$ így

$$\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x = \ln\left|x^2-2x+2\right| + c$$

Példák

$$\int \frac{5}{x-2}\,\mathrm{d}x = 5\ln|x-2| + c$$

$$\int \frac{5}{(x-2)^4}\,\mathrm{d}x = 5\int (x-2)^{-4}\,\mathrm{d}x = 5\frac{(x-2)^{-3}}{-3} + c = -\frac{5}{3}\frac{1}{(x-2)^3} + c$$

$\displaystyle\int \frac{2x-4}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x$ irreducibilis másodfokú nevező: $D = \sqrt{4-8}$

$$\frac{2x-4}{x^2-2x+2} = \frac{2x-2}{x^2-2x+2} + \frac{-2}{(x-1)^2+1},\ \text{így}$$

$$\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x = \ln\left|x^2-2x+2\right| + c$$

$$\int \frac{-2}{(x-1)^2+1}\,\mathrm{d}x = -2\int \frac{1}{(x-1)^2+1}\,\mathrm{d}x = -2\cdot\operatorname{arctg}(x-1) + c.$$

Összefoglalás

Két polinom hányadosának integrálása:

1. Polinomosztás. (ha szükséges)
2. A nevező szorzattá alakítása.
3. Résztörtek felírása.
4. Résztörtek integrálása.

További példák

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = ?$$

1. Polinomosztásra nincs szükség.
2. Nevező szorzatalakja:

$$x^2-1=(x-1)(x+1)=\underbrace{(x-\alpha_1)^{k_1}}_{\alpha_1=1,\,k_1=1}\underbrace{(x-\alpha_2)^{k_2}}_{\alpha_2=-1,\,k_2=1}$$

3. Résztörtek:

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \frac{(A_1+A_2)x+(A_1-A_2)}{(x-1)(x+1)}\,\mathrm{d}x \underset{\substack{A_1+A_2=0\\ A_1-A_2=1\\ A_1=1/2,\,A_2=-1/2}}{=} \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x =$$

4. Integrálás:

$$= \frac{1}{2}\left(\ln|x-1|-\ln|x+1|\right)+c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+c$$

További példák

$$\int \frac{-5x+6}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x = ?$$

1. Polinomosztásra nincs szükség.

2. Nevező szorzatalakja:

$$x^2+x-2=(x-1)(x+2)=\underbrace{(x-\alpha_1)^{k_1}}_{\alpha_1=1,\,k_1=1}\underbrace{(x-\alpha_2)^{k_2}}_{\alpha_2=-2,\,k_2=1}$$

3. Résztörtek: $\dfrac{-5x+6}{x^2+x-2}=\dfrac{A_1}{x-1}+\dfrac{A_2}{x+2}=\dfrac{A_1x+2A_1+A_2x-A_2}{(x-1)(x+2)}$

$$A_1+A_2=-5 \quad 2A_1-A_2=6 \longrightarrow A_1=\frac{1}{3},\ A_2=\frac{-16}{3}.$$

4. Integrálás:

$$\int \frac{-5x+6}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x-\frac{16}{3}\int\frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{16}{3}\ln|x+2|+c.$$

További példák

$$\int \frac{x^4-6}{x^4+2x^2}\,\mathrm{d}x = ?$$

1. Polinomosztás. $\dfrac{x^4-6}{x^4+2x^2} = 1 + \dfrac{-2x^2-6}{x^4+2x^2}$

2. Nevező szorzatalakja: $x^4+2x^2 = x^2(x^2+2) = \underbrace{(x-\alpha)^k}_{\alpha=0,\, k_1=2}\underbrace{(x^2+\beta x+\gamma)^l}_{\beta=0, \gamma=2,\, l=1}$

3. Résztörtek:

$$\frac{-2x^2-6}{x^4+2x^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{Bx+C}{x^2+2} = \frac{A_1x^3+2A_1x+A_2x^2+2A_2+Bx^3+Cx^2}{x^2(x^2+2)}$$

$$A_1+B=0,\ A_2+C=-2,\ 2A_1=0,\ 2A_2=-6 \ \rightarrow\ A_1=0,\ A_2=-3,\ B=0,\ C=1.$$

4. Integrálás:

$$\int \frac{x^4-6}{x^4+2x^2}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x - 3\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2+2}\,\mathrm{d}x = x + \frac{3}{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c.$$