# Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2023. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

# 19. előadás:
# Integrálszámítás alkalmazásai: terület, síkgörbe ívhossza, forgástest térfogata, felszíne

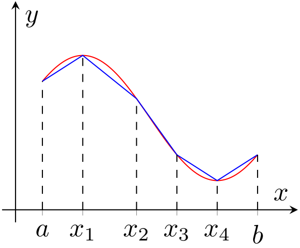
# Függvénygrafikon ívhossza

Adott egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, a grafikonjának az ívhosszát szeretnénk meghatározni.

Felosztjuk az intervallumot:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

és az osztópontok feletti grafikonpontokat $(x_i, f(x_i))$ összekötő töröttvonal hosszával közelíthetjük az ívhosszat.




Az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumhoz tartozó szakasz meredeksége megegyezik egy belső $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ pontbeli derivált értékével (Lagrange-tétel).

Ha az intervallum hossza $\Delta_i$, akkor a függvény emelkedése $f'(\xi_i)\Delta_i$, és ekkor a szakasz hossza:

$$\sqrt{(\Delta_i)^2 + (f'(\xi_i)\Delta_i)^2} = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\ \Delta_i.$$

# Függvénygrafikon ívhossza

Ezek összege közelíti a grafikon ívhosszát

$$\mathcal{I}_{f\,[a,b]} \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\ \Delta_i,$$

ha a közelítőösszegeknek van közös határértéke a felosztás finomításakor, akkor ez a határérték

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta_i \to 0}} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\ \Delta_i = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x.$$

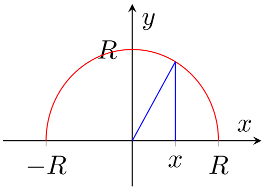
Azaz, ha $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ Reimann-integrálható, akkor

$$\mathcal{I}_{f\,[a,b]} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x.$$

# Félkör ívhossza

Számítsuk ki az $R$ sugarú félkör ívhosszát, azaz az $R$ sugarú kör kerületének felét $(R\pi)$.

Az $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$, $x\in[-R,R]$ függvény pontosan az origó középpontú $R$ sugarú "felső" félkört írja le. Ekkor




$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{R^2-x^2}}(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

Így az ívhossz:

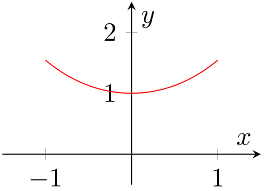
$$\mathcal{I}=\int_{-R}^{R}\sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-R}^{R}\sqrt{\frac{R^2-x^2}{R^2-x^2}+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,\mathrm{d}x=$$

$$=\int_{-R}^{R}\sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2}}\,\mathrm{d}x=\int_{-R}^{R}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{R^2}}}\,\mathrm{d}x=\int_{-R}^{R}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{R}\right)^2}}\,\mathrm{d}x=$$

$$=\left[R\arcsin\left(\frac{x}{R}\right)\right]_{-R}^{R}=R\arcsin(1)-R\arcsin(-1)=R\frac{\pi}{2}-R\left(-\frac{\pi}{2}\right)=R\pi.$$

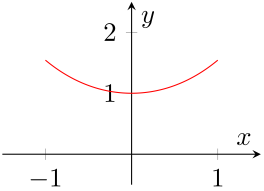
# Láncgörbe ívhossza

Számítsuk ki az $f(x) = \mathrm{ch}(x), \quad x \in [-1, 1]$ láncgörbe darabjának ívhosszát!



# Láncgörbe ívhossza

Számítsuk ki az $f(x) = \mathrm{ch}(x), \quad x \in [-1, 1]$ láncgörbe darabjának ívhosszát!




$f'(x) = \mathrm{sh}(x)$, és így az ívhossz:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{sh}(x)\Big]_{-1}^{1} =$$

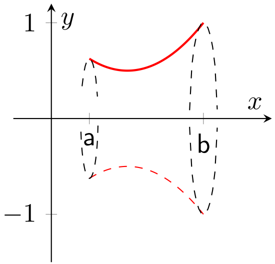
$$= \mathrm{sh}(1) - \mathrm{sh}(-1) = 2\mathrm{sh}(1) = 2\frac{e - e^{-1}}{2} = e - \frac{1}{e}.$$

# Forgástestek

Adott egy folytonos $f(x)$ függvény, mely csak nemnegatív értékeket vesz fel az $[a, b]$ intervallumon.

Ennek grafikonját az $x$ tengely körül megforgatjuk (térben).

Így egy forgásfelületet kapunk.




Példák:

$f(x) = c$ ekkor egy hengert kapunk

$f(x) = ax$ ekkor egy kúpot vagy csonkakúpot kapunk

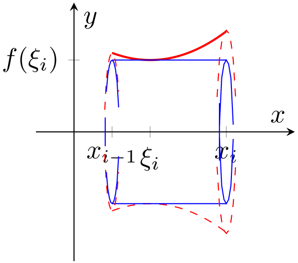
$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ egy gömb

# Forgástestek térfogata

Felosztjuk az intervallumot:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

és az osztópontok feletti $[x_{i-1}, x_i]$, $\Delta_i$ hosszú intervallumhoz tartozó forgástest darabka térfogatát közelítjük.




Egy közbülső, $f(\xi_i)$ sugarú, $\Delta_i$ magasságú henger térfogatával közelítjük, azaz

$$V_i = f^2(\xi_i)\pi\Delta_i$$

Ezek összege:

$$\sum_{i=1}^{n} f^2(\xi_i)\pi\Delta_i.$$

Az $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény grafikonjának $x$ tengely körül való forgatásával kapott forgástest térfogata a közelítőösszegek határértékeként

$$\pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

# Gömb térfogata

$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ félköríy körbeforgatásával kapott gömb:

$$V = \pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_{-R}^{R} R^2 - x^2 \, \mathrm{d}x = \pi \left[ R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^{R} =$$

$$= \pi \left( R^3 - \frac{R^3}{3} - \left( -R^3 - \frac{(-R)^3}{3} \right) \right) = \frac{4\pi}{3} R^3$$

## Forgástestek felszíne

Adott egy folytonos $f(x)$ függvény, mely csak nemnegatív értékeket vesz fel az $[a, b]$ intervallumon.

Ennek grafikonját az $x$ tengely körül megforgatjuk (térben). Így egy forgásfelületet kapunk.

A forgástest palástjának felszínét számoljuk, az alapkörök területét nem.

Az $[a, b]$ intervallum felosztásával, egy $\Delta_i$ hosszúságú intervallumhoz tartozó forgástest darabka felszínét egy közbülső, kb. $f(\xi_i)$ sugarú, $\Delta_i$ magasságú csonkakúp palástfelszínével közelítjük. Azaz

$$F_i = 2\pi f(\xi_i)\sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\Delta_i.$$

Ezek összege:

$$\sum_{i=1}^{n} 2\pi f(\xi_i)\sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\Delta_i.$$

Így az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ függvény grafikonjának $x$ tengely körül való forgatásával kapott forgástest felszíne:

$$2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

Példa:

$f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$ félkörív körbeforgatásával kapott gömb:

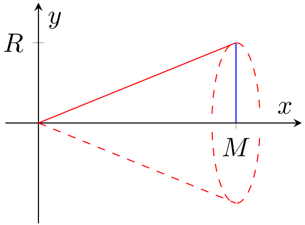
$$A=2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,\mathrm{d}x=2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2+x^2}\,\mathrm{d}x=$$

$$=2\pi\int_{-R}^{R}R\,\mathrm{d}x=2\pi[Rx]_{-R}^{R}=2\pi\left(R^2-\left(-R^2\right)\right)=4\pi R^2.$$

# Kúp térfogata

Az $R$ sugarú körlap alapú, $M$ magasságú kúpot az alábbi függvény megforgatásával kapjuk meg:

$$f(x) = \frac{R}{M}x \qquad x \in [0, M]$$




Ennek térfogata:

$$V = \pi \int_0^M \left(\frac{R}{M}x\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \frac{R^2}{M^2} \int_0^M x^2 \,\mathrm{d}x = \pi \frac{R^2}{M^2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^M =$$

$$= \pi \frac{R^2}{M^2} \frac{M^3}{3} = \frac{R^2 M \pi}{3}.$$

# Kúp felszíne

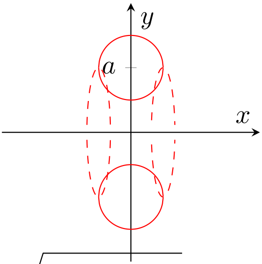
A függvény deriváltja: $f'(x) = \dfrac{R}{M}$, és ezzel a felszíne:

$$A = 2\pi \int_0^M \frac{R}{M} x \sqrt{1 + \left(\frac{R}{M}\right)^2}\, \mathrm{d}x = 2\pi \frac{R}{M} \sqrt{\frac{M^2 + R^2}{M^2}} \int_0^M x\, \mathrm{d}x =$$

$$= 2\pi \frac{R}{M} \frac{\sqrt{M^2 + R^2}}{M} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^M = 2\pi \frac{R\sqrt{M^2 + R^2}}{M^2} \frac{M^2}{2} = \pi R \sqrt{M^2 + R^2}.$$

# Forgástest felszíne helyettesítéses integrállal

Tórusz: $r$ sugarú $(0,a)$ középpontú kör megforgatása az $x$-tengely körül.




$f_1(x) = a + \sqrt{r^2 - x^2}$ - felső félkör

$f_2(x) = a - \sqrt{r^2 - x^2}$ - alsó félkör

$$(f'_{1,2}(x))^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}.$$

$$\mathcal{F} = \int_{-r}^{r} 2\pi f_1(x)\sqrt{1 + (f_1'(x))^2}\,\mathrm{d}x + \int_{-r}^{r} 2\pi f_2(x)\sqrt{1 + (f_2'(x))^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$2\pi(2a)\int_{-r}^{r}\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = 4\pi a\int_{-r}^{r}\sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = 4\pi a\int_{-r}^{r}\frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$4\pi a \int_{-r}^{r} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x =$$

Helyettesítve $x = r\cos(t)$, $\quad \sqrt{r^2 - x^2} = r\sin(t)$, $\quad \dfrac{dx}{dt} = -r\sin(t)$,

Ha $x = r \rightsquigarrow t_1 = 0$,és ha $x = -r, \rightsquigarrow t_2 = \pi$

$$-4\pi a \int_0^{\pi} \frac{r}{r\sin(t)} - r\sin(t)\,\mathrm{d}t = 4\pi a \int_0^{\pi} r\,\mathrm{d}t = 4\pi a \Big[r \cdot t\Big]_0^{\pi} =$$

$$= 4\pi a r(\pi - 0) = 4\pi^2 a r.$$