

Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2023. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia

belus@math.bme.hu

geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

21. előadás: Numerikus integrálás

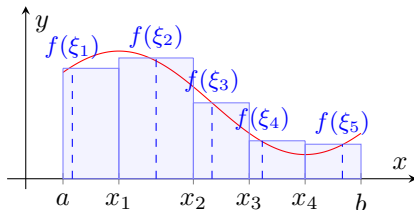
Integrálközelítő módszerek

Adott egy $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény, melynek nem ismerjük a primitív függvényét. A határozott integrál definíciójában használt közelítőösszegek segítségével becsülhetjük az integrál értékét.

Téglalap-módszer. Felosztjuk az integrálási intervallumot

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

és az osztópontok között $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ -ben vett függvényértéket $f(\xi_i)$ -t vesszük magasságként.



$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i = S_n.$$

Téglalap-módszer

A közelítő módszerekben általában feltesszük, hogy a felosztás egyenletes (ekvidisztáns), azaz

$$\Delta_i = \frac{b-a}{n}, \quad \text{és} \quad x_i = a + (i-1) \frac{b-a}{n}, \quad i = 1, \dots, n.$$

A ξ_i helyek választása szerinti különböző módszerek:

- ha $\xi_i = x_{i-1}$, bal végpontos módszer

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}),$$

- ha $\xi_i = x_i$, jobb végpontos módszer,
- ha $\xi_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$, középpontos módszer.

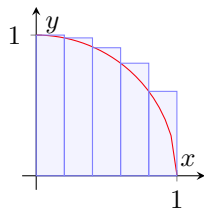
Példa

Számítsuk ki az 1 sugarú negyedkör alatti területet ($\pi/4 \approx 0,7854$) közelítve.

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [0, 1].$$

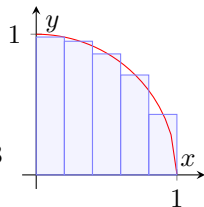
Bal végpontos módszerrel, $n = 5$ -re

$$\begin{aligned} & \frac{1}{5} (f(0) + f(0.2) + f(0.4) + f(0.6) + f(0.8)) = \\ & = \frac{1}{5} (1 + 0,979 + 0,916 + 0,8 + 0,6) = 0,859 \end{aligned}$$



Középpontos módszerrel, $n = 5$ -re

$$\begin{aligned} & \frac{1}{5} (f(0.1) + f(0.3) + f(0.5) + f(0.7) + f(0.9)) = \\ & = \frac{1}{5} (0,995 + 0,954 + 0,866 + 0,714 + 0,436) = 0,793 \end{aligned}$$

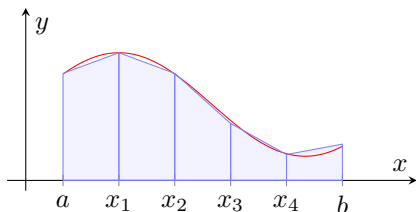


Trapéz-módszer

Felosztjuk az integrálási intervallumot n egyenlő darabra (ekvidisztáns), azaz

$$\Delta_i = \frac{b-a}{n}, \text{ és } x_i = a + (i-1) \frac{b-a}{n}, i = 1, \dots, n.$$

Az $(x_i, 0)$, $(x_{i-1}, 0)$, $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ és $(x_i, f(x_i))$ pontok által kifeszített derékszögű trapézok területével közelítjük a függvény alatti területet.



$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} = \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{f(b)}{2} \right).$$

Példa

Számítsuk ki az 1 sugarú negyedkör alatti területet ($\pi/4 \approx 0,7854$) közelítve.

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [0, 1].$$

Ha $n = 5$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{5} \left(\frac{f(0)}{2} + f(0.2) + f(0.4) + f(0.6) + f(0.8) + \frac{f(1)}{2} \right) = \\ & = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} + 0,979 + 0,916 + 0,8 + 0,6 + \frac{0}{2} \right) = 0,759 \end{aligned}$$

