1. Gyakorlat - Megoldások
Középiskolai ismeretek ismétlése.

F1. (Halmazműveletek). Lássuk be, hogy a következő halmazok esetén teljesül, hogy $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{C}$, $\mathbf{A} \neq \mathbf{C}$, $\mathbf{B} \cup \mathbf{C} = \mathbf{C}$, $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{2, 10\}$, ahol

$$\mathbf{A} = \{1, 2, 10\}, \quad \mathbf{B} = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x > 1\}, \quad \mathbf{C} = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x^2 \geq 1\}.$$

Megoldás [F1]. $A \subseteq C$ mert $\forall a \in A$-ra $a \in C$

$$1^2 = 1 \geqslant 1 \Rightarrow 1 \in C$$
$$2^2 = 4 \geqslant 1 \Rightarrow 2 \in C$$
$$10^2 = 100 \geqslant 1 \Rightarrow 10 \in C$$

De például $3^2 \geqslant 1$ szintén, miközben $3 \notin A$, így $A \neq C$. Ezért írhatjuk azt is, hogy $A \subset C$ valódi részhalmaz.

$B \cup C = C$ mivel $B \subset C$ belátható, hiszen $\forall b \in B$-re $b \in C$

$$B = \{2, 3, 4, \ldots\}$$
$$C = \{\ldots, -2, -1, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

$A \cap B = \{1, 2, 10\} \cap \{2, 3, 4, \ldots\} = \{2, 10\}$, pontosan két elem van A-ban, ami B-ben is szerepel.

F2. (Egyenletek megoldása). Oldjuk meg $\mathbb{R}$-en a következő egyenleteket és szemléltessük megoldáshalmazukat a számegyenesen:

(a) $\quad x + 2 = \sqrt{4x + 13}$, $\qquad$ (b) **(Hf)** $\quad 3x = \sqrt{x + 3} + 1$

(c) $\quad \left|\dfrac{3x + 2}{x - 1}\right| = 3$, $\qquad$ (d) **(Hf)** $\quad \left|\dfrac{x + 5}{2}\right| = 1.$

Megoldás [F2]. (a) A gyökvonás miatt $4x+13 \geq 0$, azaz $x \geq -13/4$. Az egyenletet négyzetre emelve esetleg hamis gyököket kaphatunk:

$$\begin{aligned}
(x+2)^2 &= 4x+13 \\
x^2+4x+4 &= 4x+13 \qquad / -4x-4 \\
x^2 &= 9 \\
x &= \pm 3
\end{aligned}$$

Visszahelyettesítve ezeket az eredeti egyenletbe

$$\begin{aligned}
5 = 3+2 &= \sqrt{4\cdot 3+13} = \sqrt{25} = 5 \\
-1 = -3+2 &\neq \sqrt{4\cdot(-3)+13} = \sqrt{-12+13} = \sqrt{1} = 1
\end{aligned}$$

azt kapjuk, hogy az $x=3$ a helyes megoldás, az $x=-3$ nem megoldás.

(b) $x=1$ megoldás, az $x=-2/9$ nem megoldás.

(c) Kikötjük, hogy $x-1 \neq 0$, azaz $x \neq 1$. Egy szám abszolút értéke pontosan akkor 3, ha a szám -3 vagy $+3$. Tehát két eset van:

$$\begin{aligned}
\frac{3x+2}{x-1} &= 3 \\
3x+2 &= 3x-3 \qquad / -3x \\
2 &\neq -3
\end{aligned}$$

azaz itt nincs megoldás, vagy

$$\begin{aligned}
\frac{3x+2}{x-1} &= -3 \\
3x+2 &= -3x+3 \qquad / +3x-2 \\
6x &= 1
\end{aligned}$$

azaz $x = \dfrac{1}{6} (\neq 1)$ az egyetlen megoldás.

(d) $x=-3$ vagy $x=-7$.

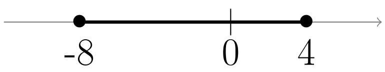
F3. (Abszolútértékes egyenlőtlenség megoldása). Oldjuk meg $\mathbb{R}$-en a következő egyenlőtlenséget, és szemléltessük a megoldáshalmazt a számegyenesen:

$$(a) \quad \left|\frac{x+2}{2}\right| \leq 3, \qquad\qquad (b)\ \textbf{(Hf)} \quad \left|\frac{2x+5}{3}\right| \geq 1.$$

Megoldás [F3]. (a) Egy szám abszolút értéke pontosan akkor legfeljebb 3, ha a szám -3 és 3 között van:

$$\begin{aligned} -3 \leq & \frac{x+2}{2} \leq 3 && / \cdot 2 \\ -6 \leq & x+2 \leq 6 && / -2 \\ -8 \leq & x \leq 4 \end{aligned}$$

tehát a megoldás: $x \in [-8, 4]$.



(b) $x \in (-\infty, -4] \cup [-1, \infty)$

F4. (Egyenlőtlenségrendszer felírása). Írjunk fel olyan egyenlőtlenségrendszert, melynek megoldáshalmaza az $\mathbf{A}(0,0)$, $\mathbf{B}(0,5)$ és $\mathbf{C}(1,3)$ csúcspontú háromszög belseje!

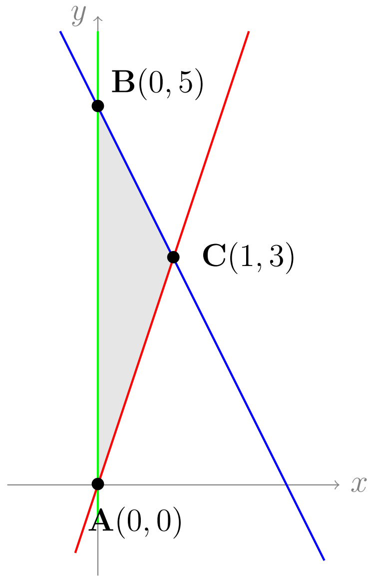
Megoldás [F4].

AB oldalegyenese az y-tengely, melynek egyenlete $x = 0$, ettől jobbra lévő pontok halmaza: $x > 0$.

AC oldalegyenes meredéksége $(3-0)/(1-0) = 3$ így az egyenlete $y = 3x + 0$ (átmegy az origón).

A háromszög belseje ezen egyenes felett van, így a megfelelő egyenlőtlenség: $y > 3x$.

A BC oldalegyenes meredekége -2, így az egyenlete $y = -2x + 5$, mert az y-tengelyt az 5-nél metszi. A háromszög belseje ezen egyenes alatt van, így a megfelelő egyenlőtlenség: $y < -2x + 5$.



F5. (Körök és parabolák ábrázolása). Vázlatosan ábrázoljuk azon pontok mértani helyét a síkon, melyekre az alábbi egyenlőtlenségek egyszerre teljesülnek

$$x^2 + y^2 + 2y < 3 \qquad \text{és} \qquad y^2 < x + 2.$$

Megoldás [F5]. Az első egyenlőtlenséget teljes négyzetté alakítjuk:

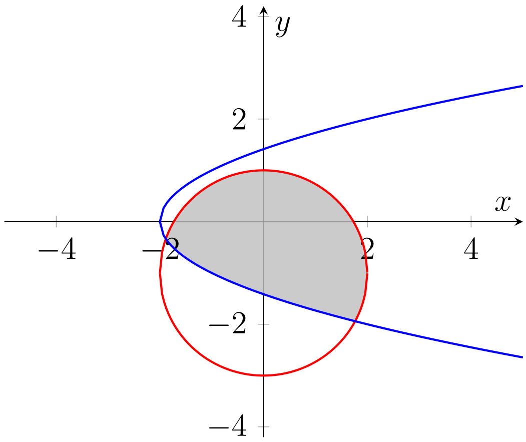
$$x^2 + (y+1)^2 - 1 < 3$$
$$x^2 + (y+1)^2 < 4,$$

ami egy $(0, -1)$ középpontú, 2 sugarú kör belseje.

A második egyenlőtlenségnél először csak a határgörbét tekintsük:

$$y^2 = x + 2.$$

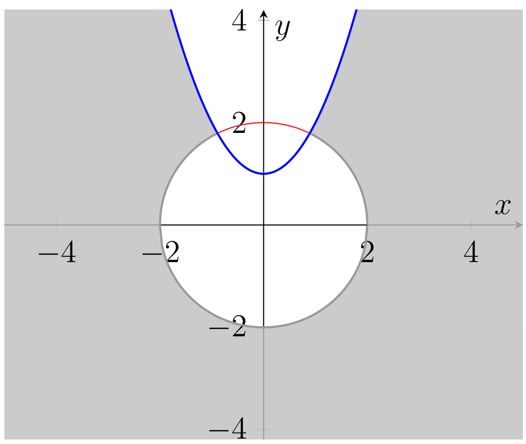
Ez egy parabola, melynek szimmetriatengelye az $y = -0/(2 \cdot 1) = 0$ azaz az x-tengely. Csúcspontja az $y = 0$ behelyettesítésével adódik $(-2, 0)$. A görbe y-tengellyel vett metszéspontjai az $x = 0$ és $y = \pm\sqrt{2}$ koordinátájú pontok. Ennek a belső pontjai az egyenlőtlenséget kielégítő pontok.



F6. (Hf) Vázlatosan ábrázoljuk azon pontok mértani helyét a síkon, melyekre az alábbi egyenlőtlenségek egyszerre teljesülnek

$$x^2 + y^2 \geq 4 \qquad \text{és} \qquad y < x^2 + 1.$$

Megoldás [F6].



Opcionális(ha marad idő)

F7. (Teljes indukció). Bizonyítsuk be teljes indukcióval minden $n > 0$ egész számra, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Megoldás [F7]. Ha $n = 1$

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot (1+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}.$$

Tegyük fel $n = N$-re igaz, azaz

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{N}{N+1} \qquad \text{(indukciós feltétel)}$$

Vizsgáljuk $n = N+1$-re

$$\sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(N+1)(N+2)} \underset{\text{(ind.felt.)}}{=}$$

$$= \frac{N}{N+1} + \frac{1}{(N+1)(N+2)} = \frac{N(N+2)+1}{(N+1)(N+2)} = \frac{N^2+2N+1}{(N+1)(N+2)} = \frac{(N+1)^2}{(N+1)(N+2)} = \frac{N+1}{N+2}.$$

F8. (Indirekt bizonyítás). Igazoljuk, hogy $\sqrt{5}$ irracionális szám.

Megoldás [F8]. Tegyük fel indirekt, hogy $\sqrt{5}$ racionális, ekkor $\exists\, p, q \in \mathbb{Z}$, úgy hogy $\sqrt{5} = p/q$. Legyen p és q olyan pozitív egész, hogy a tört tovább már nem egyszerüsíthető (azaz nincs közös osztójuk). Ekkor

$$\begin{aligned}
\sqrt{5} &= p/q && / \cdot q \\
\sqrt{5} \cdot q &= p && \text{/az egyenletet négyzetre emeljük, hisz } p, q > 0 \\
5q^2 &= p^2 && / : 25 \qquad \text{ekkor } p\text{-nek osztója kell legyen az 5, tehát } r = p/5 \text{ egész} \\
\frac{q^2}{5} &= r^2
\end{aligned}$$

és mivel a jobb oldalon egész szám áll, ezért $\frac{q^2}{5}$ is egész szám kell, hogy legyen, tehát q-nak is osztója az 5. Így találtunk egy közös osztót p-re és q-ra, ami ellentmond annak, hogy p/q tovább nem egyszerüsíthető. Ezért az eredeti feltevésünk hamis kell, hogy legyen.