3. Gyakorlat - Megoldások
Függvények globális tulajdonságai

F1. (Függvények értelmezési tartománya). Adjuk meg a valós számoknak azt a lehető legbővebb részhalmazát, amelyen a következő kifejezés értelmezhető:

$$\frac{\sqrt{2x-1}}{3x+2} \cdot \log_{\frac{1}{3}} |2x-1|.$$

Megoldás [F1]. Négyzetgyököt csak nemnegatív számból tudunk vonni, így szükséges, hogy $2x - 1 \geq 0$, azaz $x \geq \frac{1}{2}$. Nullával nem tudunk osztani, így $3x + 2 \neq 0$, azaz $x \neq -\frac{3}{2}$. A logaritmus függvény csak pozitív számokon értelmezett, így szükséges, hogy $|2x - 1| > 0$, ami azt jelenti, hogy $2x - 1 \neq 0$, azaz $x \neq \frac{1}{2}$. Mind a három kikötés szükséges, ami azt jelenti, hogy $x > \frac{1}{2}$ azaz $x \in (\frac{1}{2}, \infty)$.

F2. (Függvénykompozíció I). Írjuk fel az $f \circ g$ és a $g \circ f$ kompozíciót a következő függvények esetében:

(a) $f(x) = 1 - x^2 \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad g(u) = \sqrt{u} \quad (u \geq 0),$

(b) $f(x) = x^2 \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad g(u) = 2^u \quad (u \in \mathbb{R}).$

Megoldás [F2]. (a)

$$(f \circ g)(u) = f(g(u)) = f(\sqrt{u}) = 1 - (\sqrt{u})^2 = 1 - u, \quad u \geq 0$$

Ez a kompozíció csak nemnegatív u-kra értelmes, habár a kapott kifejezés értelmezhető tetszőleges u-ra is.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(1 - x^2) = \sqrt{1 - x^2}$$

feltéve, hogy a g függvény értelmezési tartománya miatt $1 - x^2 \geq 0$, azaz $|x| \leq 1$.

(b) Ebben az esetben nincs gond az értelmezési tartománnyal:

$$(f \circ g)(u) = f(g(u)) = f(2^u) = (2^u)^2 = 2^{2u},$$

használva a hatványozás azonosságait.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2^{(x^2)}.$$

F3. (Függvénykompozíció II). Mely két függvény kompozíciója az alábbi függvények?

$$(a) \quad e^{x^2}, \qquad (b) \quad \sin^2(x), \qquad (c) \quad \ln(\ln(x)).$$

Megoldás [F3]. (a) Ha kiszámoljuk a függvény értékét, akkor először a négyzetre emelést kell kiszámolnunk, így ez a belső függvény $g(u) = u^2$. Másodszorra az e-re emeljük ezt, tehát az exponenciális függvény a külső függvény, $f(x) = e^x$. $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$.

(b) Először a sinus függvényt kell kiszámolnunk $g(u) = \sin(u)$, és ennek eredményét emeljük négyzetre $f(x) = x^2$. Azaz $(f \circ g)(u) = \sin^2(u)$. $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$.

(c) Először az ln függvényt kell kiszámolnunk $f(u) = \ln(u)$, és ennek eredményét ismét az $f(x) = \ln(x)$ függvénybe írjuk. Azaz $(f \circ f)(u) = \ln(\ln(u))$. $D_{f \circ f} = (1, \infty)$, hiszen $\ln(u) > 0$ kell legyen, azaz $u > 1$.

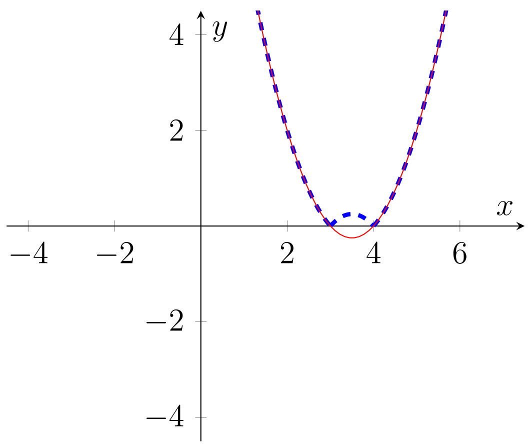
F4. (Invertálhatóság vizsgálata). Bizonyítsuk be, hogy az alábbi függvény nem invertálható.

$$f(x) = |x^2 - 7x + 12|.$$

Megoldás [F4]. A függvény nem injetív, azaz van olyan érték, amit többször vesz fel, például

$$|x^2 - 7x + 12| = 0$$
$$x^2 - 7x + 12 = 0$$
$$x_{1,2} = 3; 4$$

A $g(x) = x^2 - 7x + 12$ függvény egy felfelé nyitott parabola, melynek tengelye az $x = 7/2$, csúcspontja a $(3.5, -0.25)$. Ha mindent pontban $f(x) = |g(x)|$, akkor a parabola x-tengely alatti pontjait feltükrözvén kapjuk az f grafikonját.



F5. (Inverz számítása) Invertálhatóak-e az alábbi függvények? Ha igen, állítsuk elő az inverz függvényt!

(a) $f(x) = \dfrac{x-2}{2x+3} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\},$

(b) **(Hf)** $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{2\},$

(c) $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) - 7 \quad x \in (0, \pi),$

(d) **(Hf)** $f(x) = \sqrt[3]{27 - x^3}.$

Megoldás [F5]. (a) Az invertálhatósághoz az kell, hogy az $f(x_1) = f(x_2)$ egyenlőségből következzen, hogy $x_1 = x_2$. Ebben az esetben:

$$\frac{x_1 - 2}{2x_1 + 3} = \frac{x_2 - 2}{2x_2 - 3}$$

$$(x_1 - 2)(2x_2 + 3) = (x_2 - 2)(2x_1 + 3)$$

$$2x_1x_2 - 4x_2 + 3x_1 - 6 = 2x_1x_2 - 4x_1 + 3x_2 - 6$$

$$7x_1 = 7x_2$$

$$x_1 = x_2.$$

Tehát a függvény invertálható. Ha $f(x) = y$ akkor keressük meg, hogy adott y esetén hogyan fejezhető ki x.

$$\begin{aligned}
\frac{x-2}{2x+3} &= y \\
x-2 &= y(2x+3) \\
x-2 &= 2xy+3y \\
x-2xy &= 3y+2 \\
x(1-2y) &= 3y+2 \\
x &= \frac{3y+2}{1-2y}, \qquad \text{ha } y \neq \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Azonban $y \neq \frac{1}{2}$ teljesül, hiszen ha

$$\begin{aligned}
\frac{x-2}{2x+3} &= \frac{1}{2} \\
2x-4 &= 2x+3 \\
-4 &\neq 3.
\end{aligned}$$

Így az inverzfüggvény $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+2}{1-2x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

(b) Az invertálhatósághoz az kell, hogy az $f(x_1) = f(x_2)$ egyenlőségből következzen, hogy $x_1 = x_2$. Ebben az esetben:

$$\begin{aligned}
\frac{x_1+1}{x_1-2} &= \frac{x_2+1}{x_2-2} \\
(x_1+1)(x_2-2) &= (x_2+1)(x_1-2) \\
x_1x_2 + x_2 - 2x_1 - 2 &= x_1x_2 + x_1 - 2x_2 - 2 \\
3x_2 &= 3x_1 \\
x_1 &= x_2.
\end{aligned}$$

Tehát a függvény invertálható. Ha $f(x) = y$ akkor keressük meg, hogy adott y esetén hogyan fejezhető ki x.

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{x-2} &= y \\
x+1 &= y(x-2) \\
x+1 &= xy-2y \\
x-xy &= -1-2y \\
x(1-y) &= -1-2y \\
x &= \frac{2y+1}{y-1}, \qquad \text{ha } y \neq 1.
\end{aligned}$$

Azonban $y \neq 1$ teljesül, hiszen ha

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{x-2} &= 1 \\
x+1 &= x-2 \\
1 &\neq -2.
\end{aligned}$$

Így az inverzfüggvény $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(c) Hasonlóan az előzőhöz $x_1, x_2 \in (0, \pi)$-ra (ekkor $(x_{1,2} - \pi/2) \in (-\pi/2, \pi/2)$-on van):

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}\left(x_1 - \frac{\pi}{2}\right) - 7 &= \operatorname{tg}\left(x_2 - \frac{\pi}{2}\right) - 7 \\
\operatorname{tg}\left(x_1 - \frac{\pi}{2}\right) &= \operatorname{tg}\left(x_2 - \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

A $(0, \pi)$ intervallumban a $\operatorname{tg}(x-\pi/2)$ függvény szigorúan monoton nő, ebben a periódusban minden értéket egyszer vesz fel, tehát itt következik, hogy

$$\begin{aligned}
x_1 - \frac{\pi}{2} &= x_2 - \frac{\pi}{2} \\
x_1 &= x_2.
\end{aligned}$$

Tehát invertálható a függvény. Az inverz kiszámításához:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-7 &= y \\ \operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right) &= y+7 \end{aligned}$$

Tudjuk, hogy a keresett x-re $\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, így az arctg függvény pontosan a megfelelő értéket adja meg:

$$\begin{aligned} x-\frac{\pi}{2} &= \operatorname{arctg}(y+7) \\ x &= \operatorname{arctg}(y+7)+\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Tehát az inverz függvény: $f^{-1}(x)=\operatorname{arctg}(x+7)+\frac{\pi}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$.

(d) Invertálható, és az inverz az eredeti függvény!

Opcionális(ha marad idő)

F6. Állapítsuk meg, hogy az adott függvények közül melyek párosak, páratlanok vagy egyik tulajdonságot sem teljesítik!

(a) $f(x)=\dfrac{5x}{x^2-1}$,

(b) $f(x)=x^{-5}\cdot\sin(x)+3$.

Megoldás [F6]. (a) $D_f=\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$, páratlan, mert

$$f(-x)=\frac{-5x}{(-x)^2-1}=-\frac{5x}{x^2-1}=-f(x).$$

(b) $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, páros(= páratlan · páratlan+páros), mert

$$f(-x)=\frac{1}{(-x)^5}\cdot\sin(-x)+3=-x^{-5}\cdot-\sin(x)+3=f(x).$$