4. Gyakorlat - Megoldások
Numerikus sorozatok

F1. (Korlátosság, monotonitás és konvergencia). Vizsgáljuk a sorozatok korlátosságát, monotonitását, konvergenciáját!

$$(a)\quad a_n = 3n + \frac{1}{n}, \qquad\qquad (b)\quad b_n = \frac{3n}{\sqrt{n^2+1}},$$

$$(c)\quad c_n = \frac{2^{n+2}-1}{5^n}, \qquad\qquad (d)\textbf{(Hf)}\quad d_n = \frac{1}{1-4^n}.$$

Megoldás [F1]. (a)

$$\begin{aligned}
a_n &\gtrless a_{n+1}\\
3n + \frac{1}{n} &\gtrless 3(n+1) + \frac{1}{n+1}\\
\frac{3n^2+1}{n} &\gtrless \frac{3(n+1)^2+1}{n+1}\\
(3n^2+1)(n+1) &\gtrless (3(n+1)^2+1)n\\
3n^3+3n^2+n+1 &\gtrless 3n^3+6n^2+4n\\
0 &< 3n^2+3n-1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{tehát monoton növő.}
\end{aligned}$$

Felülről nem korlátos, mert $3n \to \infty$, $\frac{1}{n} \to 0$, így $\lim\limits_{n\to\infty} 3n + \frac{1}{n} = \infty$, a sorozat végtelenbe tartó (divergens). Alsó korlátja a monotonitás miatt az első eleme $a_1 = 3 + \frac{1}{1} = 4$.

(b) A határérték $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{3}{\sqrt{1+0}} = 3$, vizsgálva a monotonitást

$$\begin{aligned}
b_n &\gtrless b_{n+1}\\
\frac{3n}{\sqrt{n^2+1}} &\gtrless \frac{3(n+1)}{\sqrt{(n+1)^2+1}}\\
\frac{3n}{\sqrt{n^2+1}} &\gtrless \frac{3n+3}{\sqrt{n^2+2n+2}}\\
3n\sqrt{n^2+2n+2} &\gtrless (3n+3)\sqrt{n^2+1}\\
9n^2(n^2+2n+2) &\gtrless (9n^2+18n+9)(n^2+1)\\
9n^4+18n^3+18n^2 &\gtrless 9n^4+18n^3+18n^2+18n+9\\
0 &< 18n+9, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{tehát monoton növő.}
\end{aligned}$$

Felülről korlátos, legkisebb felső korlátja a határérték, a 3. Legnagyobb alsó korlátja a monotonitás miatt az első eleme $b_1 = \dfrac{3}{\sqrt{1+1}} = 3/\sqrt{2} \approx 2,1213$.

(c) A határérték $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+2}-1}{5^n} = \lim\limits_{n\to\infty} 4\left(\dfrac{2}{5}\right)^n - \left(\dfrac{1}{5}\right)^n = 0-0 = 0$, vizsgálva a monotonitást

$$\begin{aligned}
c_n &\gtrless c_{n+1}\\
\frac{2^{n+2}-1}{5^n} &\gtrless \frac{2^{n+3}-1}{5^{n+1}}\\
5(2^{n+2}-1) &\gtrless 2^{n+3}-1\\
5\cdot 2^{n+2} - 2^{n+3} &\gtrless 4\\
2^{n+2} &> \frac{4}{3}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{tehát monoton csökkenő.}
\end{aligned}$$

Felülről korlátos, felső korlátja $a_1 = 7/5$. Legnagyobb alsó korlátja a monotonitás miatt a határérték: 0.

(d) Monoton növekvő, korlátos, legnagyobb alsó korlátja $a_1 = -1/3$, legkisebb felső korlátja a határérték: 0.

F2. (Sorozatok határértéke). Számítsuk ki a határértékeket az ismert határértékek felhasználásával!

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^3-6n+\frac{1}{n}}{3n^5-n^2+4}$, ($b$) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[5]{n}-\sqrt{3n}+2}{\sqrt[4]{2n}+\sqrt{n}-1}$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{4n-3}-\sqrt{n+9}$, ($d$)**(Hf)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{2n}-\sqrt{n+3}}{2-\sqrt{n}}$,

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-3}{n+1}\right)^{3n}$, ($f$) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{n+2}$,

(g)**(Hf)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n}$.

Megoldás [F2]. (a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^3-6n+\frac{1}{n}}{3n^5-n^2+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{5-\frac{6}{n^2}+\frac{1}{n^4}}{3n^2-\frac{1}{n}+\frac{4}{n^3}} = \frac{5+0+0}{\infty+0+0} = 0.$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[5]{n}-\sqrt{3n}+2}{\sqrt[4]{2n}+\sqrt{n}-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{5}}-\sqrt{3}\cdot n^{\frac{1}{2}}+2}{\sqrt[4]{2}\cdot n^{\frac{1}{4}}+n^{\frac{1}{2}}-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{\sqrt[10]{n^3}}-\sqrt{3}+\dfrac{2}{\sqrt{n}}}{\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{n}}+1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}}=$$

$$=\frac{\dfrac{1}{\infty}-\sqrt{3}+\dfrac{2}{\infty}}{\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\infty}+1-\dfrac{1}{\infty}}=\frac{0-\sqrt{3}+0}{0+1-0}=-\sqrt{3}.$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{4n-3}-\sqrt{n+9}=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n-3}-\sqrt{n+9})\cdot\frac{\sqrt{4n-3}+\sqrt{n+9}}{\sqrt{4n-3}+\sqrt{n+9}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n-3-n-9}{\sqrt{4n-3}+\sqrt{n+9}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-12}{\sqrt{4n-3}+\sqrt{n+9}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{n}-\dfrac{12}{\sqrt{n}}}{\sqrt{4-\dfrac{3}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{9}{n}}}=$$

$$=\frac{3\cdot\infty-12\cdot 0}{\sqrt{4-0}+\sqrt{1+0}}=\frac{\infty-0}{2+1}=\infty.$$

(d) $1-\sqrt{2}$.

(e)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{n+1}\right)^{3n}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{4}{n+1}\right)^{n+1}\right)^{\dfrac{3n}{n+1}}=(e^{-4})^3=e^{-12}=\frac{1}{e^{12}}.$$

vagy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{n+1}\right)^{3n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(1-\frac{3}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right)^3=\left(\frac{e^{-3}}{e}\right)^3=e^{-12}.$$

(f)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n+2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{2}=(e^2)\cdot 1^2=e^2.$$

(g) e^{-2}.

F3. (Rendőr-elv). Számítsuk ki a határértékeket a Rendőr-elv alkalmazásával!

$$(a)\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+3},\qquad (b)\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n},\qquad (c)\textbf{(Hf)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\sin(2n)}{7n-2}.$$

Megoldás [F3].

(a) $1=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}<\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+3}\underset{n>2}{<}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}=1.$

(b) $\quad 3 = \lim_{n\to\infty} 3 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n} < \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} < \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2 \cdot 3^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3.$

(c) $\quad 0.$