6. Gyakorlat - Megoldások
Differenciálszámítás

F1. (Függvények deriváltja). Számítsuk ki az alábbi függvények deriváltját!

(a) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 11$

(b) $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{5x^5}$

(c) $f(x) = e^x - \cos(x)$

(d) $f(x) = (1 + x^3)\,\mathrm{tg}(x)$

(e) **(Hf)** $f(x) = x^2 \sin(x)$

(f) **(Hf)** $f(x) = \dfrac{x^3}{\ln(x)}$

(g) $f(x) = \mathrm{ch}(x)$

(h) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2}{x - 2}$

(i) **(Hf)** $f(x) = \dfrac{(x + 5)\,\mathrm{sh}(x)}{12}$

(j) $f(x) = \dfrac{\ln^2(x)}{5}$

Megoldás [F1].

(a) $f'(x) = (x^3-5x^2+5x+11)' = (x^3)'-5(x^2)'+5(x)'+(11)' = 3x^2-5(2x)+5+0 = 3x^2-10x+5.$

(b) $$f'(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5x^5}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-2} - \frac{1}{5}x^{-5}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{-3} - \frac{1}{5}\cdot(-5)x^{-6} = \\ = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^6}.$$

(c) $f'(x) = (e^x - \cos(x))' = e^x - (-\sin(x)) = e^x + \sin(x).$

(d) $$f'(x) = ((1+x^3)\mathrm{tg}(x))' = (1+x^3)'\mathrm{tg}(x) + (1+x^3)\mathrm{tg}'(x) = (0+3x^2)\mathrm{tg}(x) + (1+x^3)\frac{1}{\cos^2(x)}.$$

(e) $f'(x) = (x^2\sin(x))' = (x^2)'\sin(x) + x^2(\sin(x))' = 2x\sin(x) + x^2\cos(x).$

(f) $$f'(x) = \left(\frac{x^3}{\ln(x)}\right)' = \frac{(x^3)'\ln(x) - x^3\ln(x)'}{\ln^2(x)} = \frac{3x^2\ln(x) - x^3\dfrac{1}{x}}{\ln^2(x)} = \frac{3x^2\ln(x) - x^2}{\ln^2(x)}.$$

(g) $$f'(x) = (\mathrm{ch}(x))' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}(x).$$

(h) $$f'(x) = \left(\frac{x^3+2}{x-2}\right)' = \frac{(x^3+2)'(x-2) - (x^3+2)(x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{3x^2(x-2) - (x^3+2)\cdot 1}{(x-2)^2} = \\ = \frac{3x^3 - 6x^2 - x^3 - 2}{(x-2)^2} = \frac{2x^3 - 6x^2 - 2}{(x-2)^2}.$$

(i) $$f'(x) = \left(\frac{(x+5)\,\mathrm{sh}(x)}{12}\right)' = \frac{1}{12}\left((x+5)'\,\mathrm{sh}(x) + (x+5)\,\mathrm{sh}'(x)\right) = \frac{1}{12}\left(\mathrm{sh}(x) + (x+5)\,\mathrm{ch}(x)\right).$$

(j) $$f'(x) = \left(\frac{\ln^2(x)}{5}\right)' = \frac{1}{5}(\ln'(x)\ln(x) + \ln(x)\ln'(x)) = \frac{2}{5}\frac{\ln(x)}{x}$$

$$\text{vagy}\ \left(\frac{\ln^2(x)}{5}\right)' = \frac{1}{5}\cdot 2\cdot\ln(x)\ln'(x) = \frac{2}{5}\frac{\ln(x)}{x}.$$

F2. (Érintők)

(a) Legyen

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Számítsuk ki $f'(x)$-et. Mennyi az $x_0 = 1$ pontban az érintő iránytangense? Írjuk fel az $x_0 = 1$ pontban az érintőegyenes egyenletét.

(b) Írjuk fel az $f(x) = \sin(x)$ függvény grafikonjához húzott érintő egyenes egyenletét az $x_0 = \pi$ pontban. Lesz-e a függvénynek vízszintes érintője?

(c) **(Hf)** Írjuk fel az $f(x) = (x^2+1)\,e^x$ függvény $x_0 = 0$ pontjához tartozó érintő egyenletét.

Megoldás [F2]. (a) $f'(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)' = \frac{(-1)(1+x)-(1-x)(1)}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}$.
Ha $x_0 = 1$, akkor $f'(1) = \frac{-2}{(1+1)^2} = -\frac{1}{2}$ az iránytangens nagysága. Így az érintő egyenlete $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$. Azaz $y = -\frac{1}{2}(x-1) + 0$.

(b) $f'(x) = (\sin(x))' = \cos(x)$, $f'(\pi) = \cos(\pi) = -1$, $f(\pi) = \sin(\pi) = 0$, tehát az érintő egyenlete $y = (-1)(x-\pi) + 0 = \pi - x$.
Az érintő akkor vízszintes, ha $f'(x_0) = 0$. Keressük a derivált függvény zérushelyeit. $f'(x) = \cos(x) = 0$, ha $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$. Ezekben a pontokban az érintő vízszintes, meredeksége 0. Például az $x_0 = \frac{\pi}{2}$-ben az egyenlet $y = 0(x-\pi/2) + \sin(\pi/2) = 1$.

(c) $f'(x) = ((x^2+1)e^x)' = 2xe^x + (x^2+1)e^x$, $f'(0) = 2\cdot 0 \cdot e^0 + (0^2+1)e^0 = 0+1 = 1$, $f(0) = (0^2+1)e^0 = 1$. Tehát az érintő egyenlete $y = 1(x-0)+1 = x+1$.

F3. (Láncszabály) Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva számítsuk ki az alábbi függvények deriváltjait.

(a) $(3x^2+4x+1)^5$,

(b) $(1+\sqrt[3]{x})^3$,

(c) **(Hf)** $\sqrt{x^2+1}$,

(d) **(Hf)** e^{x^4},

(e) $\cos\left(e^{2x+3}\right)$.

Megoldás [F3].

(a) $f'(x) = ((3x^2 + 4x + 1)^5)' = 5(3x^2 + 4x + 1)^4 \cdot (6x + 4).$

(b) $f'(x) = \left((1 + \sqrt[3]{x})^3\right)' = 3\,(1 + \sqrt[3]{x})^2 \cdot (0 + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}) = 3\,(1 + \sqrt[3]{x})^2 \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{(1 + \sqrt[3]{x})^2}{\sqrt[3]{x^2}}.$

(c) $f'(x) = (\sqrt{x^2 + 1})' = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$

(d) $f'(x) = \left(e^{x^4}\right)' = e^{x^4} \cdot (x^4)' = e^{x^4} 4x^3.$

(e) $f'(x) = (\cos(e^{2x+3}))' = -\sin(e^{2x+3}) \cdot (e^{2x+3})' = -\sin(e^{2x+3}) \cdot e^{2x+3} \cdot (2x + 3)' =$

$$= -\sin(e^{2x+3}) \cdot e^{2x+3} \cdot 2.$$