

7. Gyakorlat - Megoldások

Szélsőértékek, monotonitás

F1. (Monotonitás, szélsőérték.) Határozzuk meg az alábbi függvény monotonitási intervallumait, lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit!

$$(a) f(x) = \frac{x^3}{3x^2 + 1}, \quad D_f = \mathbb{R},$$

$$(b) f(x) = x - \ln(1 + x), \quad D_f = (-1, +\infty),$$

$$(c) \text{ (Hf) } f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1, \quad D_f = \mathbb{R}.$$

Megoldás [F1]. (a) $f'(x) = \frac{3x^2(3x^2 + 1) - x^3 \cdot 6x}{(3x^2 + 1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2}{(3x^2 + 1)^2} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ így a függvény monoton növekvő \mathbb{R} -en és ott szigorúan monoton növekvő, mivel a derivált csak 0-ban lesz 0. $f'(x) = 0$, ha $x = 0$, de ott a deriváltfüggvény nem vált előjelet, tehát nincs szélsőértéke.

(b) $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$, a nevező pozitív, mivel $x > -1$, így $f' < 0$, ha $x < 0$, valamint $f' > 0$ ha $x > 0$. $f' = 0$, ha $x = 0$, itt f' negatívból pozitív értékekbe vált, tehát lokális minimuma van a függvénynek. Értéke $f(0) = 0 - \ln(1) = 0$.

(c) Lokális maximum értéke van az $x = 1$ helyen: $f(1) = 2$, és lokális minimum értéke van az $x = 3$ -ban: $f(3) = -26$.

F2. (Globális szélsőértékek.) Határozzuk meg az adott intervallumon az alábbi függvények abszolút maximumát és minimumát (ha azok léteznek), és mondjuk meg azt is, hogy hol veszi fel a függvény a szélsőértékeket.

$$(a) f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1, \quad x \in [-1, 5],$$

$$(b) f(x) = 2x + \frac{200}{x}, \quad x \in (0, +\infty),$$

$$(c) \text{ (Hf) } f(x) = x^3 - 4x, \quad x \in [0, +\infty).$$

Megoldás [F2]. (a) $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) = 6(x - 1)(x + 2)$, $f'(x) = 0$, ha $x = 1$ vagy $x = -2$, de ez nincs a vizsgált tartományban.

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, 5)$	5	$(5, \infty)$
$f'(x)$	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$f(x)$	mon.nő	lok.max.	mon.csökk.	(14)	mon.csökk.	lok.min. (-6)	mon.nő	(266)	mon.nő

Globális maximum értéke: $f(5) = 266$, globális minimum értéke $f(1) = -6$ megegyezik a lokális minimummal.

(b) $f'(x) = 2 - \frac{200}{x^2} = \frac{2x^2 - 200}{x^2}$, $f'(x) = 0$, ha $x = \pm 10$.

x	$(-\infty, -10)$	-10	$(-10, 0)$	0	$(0, 10)$	10	$(10, \infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	n.é.	$-$	0	$+$
$f(x)$	mon.nő	lok.max.	mon.csökk.	n.é.	mon.csökk.	lok.min.(40)	mon.nő

Itt $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2 + \frac{200}{x} = \infty$, tehát lokális maximum értéke nincsen a függvénynek az adott tartományban. Mivel $\lim_{x \rightarrow \infty} 2 + \frac{200}{x} = \infty$ szintén, így a globális minimum értéke $f(10) = 40$, megegyezik a lokális minimummal.

(c) Globális minimuma van az $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ -ban, a minimum értéke: $-\frac{16}{3\sqrt{3}}$.

F3. (Szöveges szélsőérték feladat) Határozzuk meg az R sugarú körbe írható maximális területű téglalap oldalainak hosszúságát és területét!

Megoldás [F3]. Ha x és y jelöli a téglalap két oldalhosszát, akkor $T = x \cdot y$, és $4R^2 = x^2 + y^2$, tehát $T(x) = x \cdot \sqrt{4R^2 - x^2}$, a $0 < x < 2R$ feltétel mellett.

$$T'(x) = \sqrt{4R^2 - x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{4R^2 - x^2}}(-2x) = \frac{4R^2 - 2x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}}.$$

x	$(0, \sqrt{2}R)$	$\sqrt{2}R$	$(\sqrt{2}R, 2R)$
$T'(x)$	$+$	0	$-$
$T(x)$	mon.nő.	lok.max.($2R^2$)	mon.csökk.

Globális maximumhelye megegyezik a lokálissal $x = y = \sqrt{2}R$ oldalhosszak mellett a terület maximális nagysága $2R^2$.

F4. (Szöveges szélsőérték feladat) Magyarországon a teljes lakosság 1 év alatt összesen 10^{13} forintnyi jövedelmet kap. Tudjuk, hogy ha a keresetek $x\%$ -át kellene jövedelemadóként befizetni, akkor a lakosság a befizetendő adó $\frac{x}{50}$ -ed részét elcsalná (nem fizetné be). Ilyen feltételek mellett mekkorára kellene az adókulcsot állítani, hogy a lehető legtöbb pénz folyjon be?

Megoldás [F4]. A befolyt adó értéke az adókulcs függvényében

$$a(x) = 10^{13} \cdot \frac{x}{100} - 10^{13} \cdot \frac{x}{100} \cdot \frac{x}{50} = 10^{11} \left(x - \frac{x^2}{50} \right), \quad 0 \leq x \leq 100, \text{ tehát}$$

$$a'(x) = 10^{11} \left(1 - \frac{2x}{50} \right) = 10^{11} \left(\frac{50 - 2x}{50} \right), \text{ ahol } a'(x) = 0 \text{ ha } x = 25.$$

x	0	$(0, 25)$	25	$(25, 100)$	100
$a'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$a(x)$	mon.nő(0)	mon.nő	lok.max.($12,5 \cdot 10^{11}$)	mon.csökk.	mon.csökk.(-10^{13})

Így a függvény globális maximumhelye megegyezik a lokálissal $x = 25$. 25%-os adókulcs bevezetése a legjobb.

F5. (Hf) Andri mézeskalácsot árul az adventi vásárban. Ha az előállításra darabonként x petákot költ, akkor darabját $6\sqrt{x}$ petákért tudja eladni. Mennyit költsön az előállításra, hogy a darabonkénti haszna maximális legyen?

Megoldás [F5]. 9 petákot kell költenie darabonként az előállításra.

Opcionális(ha marad idő)

F6. Egy futópályát építenek egy téglalap alakú focipálya körül úgy, hogy a focipálya két hosszabb oldala mentén egyenes, rövidebb oldala mentén félkörpályát alakítanak ki. A futópálya teljes hossza 400 méter lesz. Mekkora legyen a focipálya oldalainak hossza, hogy a területe maximális legyen?

Megoldás [F6]. A pálya kerülete $400 = 2y + x\pi$, területe a focipálya oldalhosszainak függvényében $T(x) = x \cdot y = x \cdot \frac{(400 - x\pi)}{2} = 200x - \frac{x^2\pi}{2}$, ahol $0 < x < 400/\pi$.

Ekkor $T'(x) = 200 - \pi x$, ezért $T'(x) = 0$ ha $x = \frac{200}{\pi}$.

x	$(0, 200/\pi)$	$200/\pi$	$(200/\pi, 400/\pi)$
$T'(x)$	+	0	-
$T(x)$	mon.nő	lok.max.(2000/ π)	mon.csökk.

A globális maximumhelye megegyezik a lokálissal $x = 200/\pi$. Ekkor $y = 100$, a focipálya területe pedig $2000/\pi$.