8. Gyakorlat - Megoldások
Konvexitás, Aszimptoták, L'Hospital-szabály

F1. (Konvexitás) Adjuk meg azokat az intervallumokat, amelyeken az f függvény konvex, illetve konkáv. Van-e a függvénynek inflexiós pontja?

(a) $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x$,

(b) $f(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$,

(c) **(Hf)** $f(x) = xe^{-5x}$.

Megoldás [F1].

(a) $f''(x) = (6x^2 - 42x + 36)' = 12x - 42$

x	$\left(-\infty, \frac{7}{2}\right)$	$\frac{7}{2}$	$\left(\frac{7}{2}, \infty\right)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	konkáv	infl.p.	konvex

(b)

$$f''(x) = \left(\frac{x^3}{x-1}\right)'' = \left(\frac{3x^3 - 3x^2 - x^3}{(x-1)^2}\right)' = \left(\frac{2x^3 - 3x^2}{(x-1)^2}\right)' =$$

$$\left(\frac{(6x^2-6x)(x-1)^2 - (2x^3-3x^2)2(x-1)}{(x-1)^4}\right)' = \frac{(6x^2-6x)(x-1) - 2(2x^3-3x^2)}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{6x^3 - 12x^2 + 6x - 4x^3 + 6x^2}{(x-1)^3} = \frac{2x^3 - 6x^2 + 6x}{(x-1)^3} = \frac{2x(x^2 - 3x + 3)}{(x-1)^3}$$

A számláló $x = 0$-ban 0 lesz, $x < 0$-ra negatív, $x > 0$ esetén pozitív, mivel az $x^2 - 3x + 3$ kifejezés mindig pozitív. A nevező pozitív, ha $x \geq 1$.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	n.é.	$+$
$f(x)$	konvex	infl.p.	konkáv	n.é.	konvex

(c) $f''(x) = 5e^{-5x}(5x - 2)$. Mivel e^{-5x} mindenhol pozitív, ezért

x	$\left(-\infty, \frac{2}{5}\right)$	$\frac{2}{5}$	$\left(\frac{2}{5}, \infty\right)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	konkáv	infl.p.	konvex

F2. (Aszimptoták) Van-e az f függvénynek aszimptotája? Ha igen, akkor határozzuk meg az aszimptota egyenesének egyenletét!

(a) $f(x) = \dfrac{x^2+9}{x}$,

(b) $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$,

(c) $f(x) = \dfrac{2x^2-3x+1}{x^2+1}$,

(d) $f(x) = \sqrt{4x^2+3x+1}$,

(e) **(Hf)** $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

Megoldás [F2].

(a)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{x^2+9}{x} = \dfrac{9}{0+} = \infty \\ \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{x^2+9}{x} = \dfrac{9}{0-} = -\infty \end{array}\right\} \text{ az } x=0 \text{ pólus, itt függőleges aszimptota van } x=0 \text{ egyenlettel.}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+9}{x^2} = 1 \text{ illetve } \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+9}{x} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+9-x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{9}{x} = 0,$$

azaz a függvény a ∞-ben az $y = x$ egyeneshez tart.

Hasonlóan a $-\infty$-ben is ugyanez az egyenes adódik ferde aszimptotának.

(b) A függvény mindenhol folytonos, nincsen függőleges aszimptota.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^3 - x^2 - 2x = \pm\infty$ Nincsen vízszintes aszimptota.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3-x^2-2x}{x} = \infty$ Nincsen ferde aszimptota.

(c) A függvény $\mathbb{R}$-en folytonos, nincsen függőleges aszimptota. Vízszintes aszimptotája a $\pm\infty$-ben az $y = 2$ egyenes, mivel

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2-3x+1}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 2.$$

(d) A függvény $\mathbb{R}$-en folytonos, nincsen függőleges aszimptota.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{4x^2+3x+1} = \infty$ Nincsen vízszintes aszimptota.

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+3x+1}}{x} = 2$, ekkor

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{4x^2+3x+1} - 2x = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2+3x+1-4x^2}{\sqrt{4x^2+3x+1}+2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x+1}{\sqrt{4x^2+3x+1}+2x} = \frac{3}{4},$$

azaz a függvény a ∞ felé az $y = 2x + \dfrac{3}{4}$ egyeneshez tart.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+3x+1}}{x} \cdot \dfrac{1/|x|}{1/|x|} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{4+3/x+1/x^2}}{-1} = -2$, ekkor

$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{4x^2+3x+1} + 2x = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^2+3x+1-4x^2}{\sqrt{4x^2+3x+1}-2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x+1}{\sqrt{4x^2+3x+1}-2x} = -\dfrac{3}{4}$,

azaz a függvény a $\pm\infty$ felé az $y = -2x - \dfrac{3}{4}$ egyeneshez tart.

(e) A függvény $\mathbb{R}$-en folytonos, nincsen függőleges aszimptota. Nincsen vízszintes aszimptota. A függvény a ∞-ben az $y = x$ egyeneshez, a $-\infty$-ben pedig az $y = -x$ egyeneshez tart.

F3. (L'Hospital-szabály) A L'Hospital-szabály alkalmazásával számítsuk ki az alábbi határértékeket. Azt is állapítsuk meg, hogy milyen típusú kritikus határértékről van szó.

(a) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sin(2x-4)}{\mathrm{tg}(x-2)}$,

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)}{3x}$,

(c) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\mathrm{tg}\,(x)-x}{x-\sin(x)}$,

(d) $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

Megoldás [F3].

(a) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sin(2x-4)}{\mathrm{tg}(x-2)} = \dfrac{"0"}{0} \underset{\text{L'H}}{\leadsto} \lim\limits_{x\to2} 2\cos(2x-4)\cos^2(x-2) = 2.$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)}{3x} = \dfrac{"\infty"}{\infty} \underset{\text{L'H}}{\leadsto} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{3x} = 0.$

(c)

$$\lim_{x\to0} \frac{\mathrm{tg}\,(x)-x}{x-\sin(x)} = \frac{"0"}{0} \underset{\text{L'H}}{\leadsto} \lim_{x\to0} \frac{\dfrac{1}{\cos^2(x)}-1}{1-\cos(x)} = \lim_{x\to0} \frac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)-\cos^3(x)} =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)-\cos^3(x)} = \frac{"0"}{0} \underset{\text{L'H}}{\leadsto} \lim_{x\to0} \frac{2\sin(x)\cos(x)}{-2\cos(x)\sin(x)+3\cos^2(x)\sin(x)} =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{2}{-2+3\cos(x)} == \frac{2}{-2+3} = 2.$$

(d)

$$\lim_{x\to0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right) = "\infty-\infty" = \lim_{x\to0} \left(\frac{e^x-x-1}{xe^x-x}\right) = \frac{"0"}{0} \underset{\text{L'H}}{\leadsto}$$

$$\underset{\text{L'H}}{\leadsto} \lim_{x\to0} \left(\frac{e^x-1}{e^x+xe^x-1}\right) = \frac{"0"}{0} \underset{\text{L'H}}{\leadsto} \lim_{x\to0} \left(\frac{e^x}{2e^x+xe^x}\right) = \frac{1}{2}$$