

9. Gyakorlat - Megoldások

Teljes függvényvizsgálat

F1. (Fgv.vizsgálat.) Az alábbi függvényeken végezzünk teljes függvényvizsgálatot:

(a) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4,$

(b) $f(x) = \left(\frac{x-1}{2x+1}\right)^2,$

(c) **(Hf)** $f(x) = \frac{x^2 - 3}{2 - x},$

(d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6},$

(e) $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x},$

(f) **(Hf)** $f(x) = xe^{-2x}.$

Megoldás [F1]. (a) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

1. értelmezési tartomány: \mathbb{R}

2. zérushely: $a = x^2$ helyettesítéssel másodfokú kifejezés $a^2 - 5a + 4 = 0$ gyökei az 1 és a 4. Így a függvény szorzat alakja: $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2).$

3. paritás: $f(-x) = (-x)^4 - 5(-x)^2 + 4 = x^4 - 5x^2 + 4 = f(x)$, tehát páros.

periodicitás: nem periodikus (pl. véges sok nullhely van).

4. értelmezési tartomány szélén határértékek:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 - 5x^2 + 4 = \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \left(1 - \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^4}\right) = \infty$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 - 5x^2 + 4 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \left(1 - \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^4}\right) = \infty$$

Nincs vízszintes aszimptota.

Ferde aszimptota:

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - 5x + \frac{4}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(1 - \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^4}\right) = \infty.$$

Nincs ferde aszimptota a $+\infty$ -ben. Hasonló számolással kapjuk, hogy a $-\infty$ -ben sincsen.

5. első derivált: $f'(x) = 4x^3 - 10x = 2x(2x^2 - 5)$,

melynek $x = 0$ és $x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$ a zérushelyei.

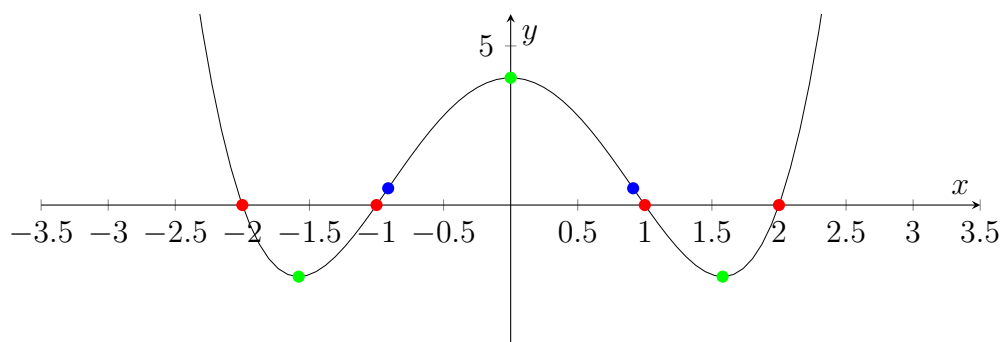
x	$(-\infty, -\sqrt{\frac{5}{2}})$	$-\sqrt{\frac{5}{2}}$	$(-\sqrt{\frac{5}{2}}, 0)$	0	$(0, \sqrt{\frac{5}{2}})$	$\sqrt{\frac{5}{2}}$	$(\sqrt{\frac{5}{2}}, +\infty)$
f'	-	0	+	0	-	0	+
f	\searrow	lok.min.	\nearrow	lok.max.	\searrow	lok.min.	\nearrow

A lokális maximum értéke: $f(0) = 4$, a lokális minimum értéke: $f(-\sqrt{\frac{5}{2}}) = f(\sqrt{\frac{5}{2}}) = -\frac{9}{4}$.

6. második derivált: $f''(x) = 12x^2 - 10$, melynek nullhelyei az $x = \pm\sqrt{\frac{5}{6}}$.

x	$(-\infty, -\sqrt{\frac{5}{6}})$	$-\sqrt{\frac{5}{6}}$	$(-\sqrt{\frac{5}{6}}, \sqrt{\frac{5}{6}})$	$\sqrt{\frac{5}{6}}$	$(\sqrt{\frac{5}{6}}, +\infty)$
f''	+	0	-	0	+
f	\cup	infl.	\cap	infl.	\cup

7.



8. értékkészlet: $\left[-\frac{9}{4}, \infty\right)$.

$$(b) \quad f(x) = \left(\frac{x-1}{2x+1} \right)^2$$

1. értelmezési tartomány: $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$

2. zérushely: $x = 1$

3. paritás: $f(-x) = \left(\frac{-x-1}{-2x+1} \right)^2 = \left(\frac{x+1}{2x-1} \right)^2 \neq \pm f(x)$, tehát nincs paritása.

periodicitás: nem periodikus (pl. véges sok nullhely van).

4. értelmezési tartomány szélein határértékek:

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} \left(\frac{x-1}{2x+1} \right)^2 = \frac{9}{4} \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} \left(\frac{1}{2x+1} \right)^2 = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{(0^+)^2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} \left(\frac{x-1}{2x+1} \right)^2 = \frac{9}{4} \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} \left(\frac{1}{2x+1} \right)^2 = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{(0^-)^2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{2x+1} \right)^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{x}}{2 + \frac{1}{x}} \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-1}{2x+1} \right)^2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{x}}{2 + \frac{1}{x}} \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

$x = -\frac{1}{2}$ -nél függőleges aszimptota van. Az $y = \frac{1}{4}$ vízszintes aszimptota.

5. első derivált: $f'(x) = 2 \cdot \frac{x-1}{2x+1} \cdot \frac{2x+1 - 2(x-1)}{(2x+1)^2} = \frac{6(x-1)}{(2x+1)^3}$, melynek $x = 1$ a zérushelye.

x	$(-\infty, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, 1)$	1	$(1, \infty)$
f'	+	-	0	+
f	\nearrow	\searrow	lok.min.	\nearrow

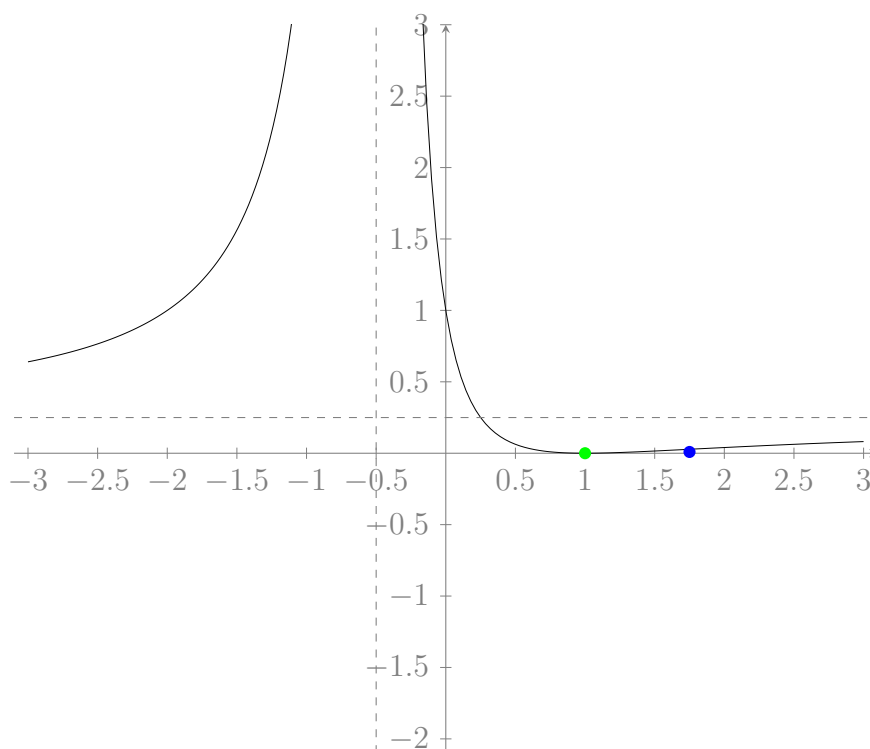
A lokális minimum értéke: $f(1) = 0$.

6. második derivált: $f''(x) = 6 \cdot \frac{(2x+1)^3 - (x-1)3(2x+1)^2 \cdot 2}{(2x+1)^6} = 6 \cdot \frac{(2x+1) - 6(x-1)}{(2x+1)^4} =$

6. $\frac{7-4x}{(2x+1)^4}$, melynek nullhelye az $x = \frac{7}{4}$.

x	$(-\infty, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, \frac{7}{4})$	$\frac{7}{4}$	$(\frac{7}{4}, \infty)$
f''	+	+	0	-
f	∪	∪	infl.	∩

7.



8. értékkészlet: $[0, \infty)$.

$$(c) \quad f(x) = \frac{x^2 - 3}{2 - x}$$

1. értelmezési tartomány: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

2. zérushely: $x = \pm\sqrt{3}$

3. paritás: $f(-x) = \frac{(-x)^2 - 3}{2 + x} = \frac{x^2 - 3}{2 + x} \neq f(x)$, tehát nincs paritása.

periodicitás: nem periodikus (pl. véges sok nullhely van).

4. értelmezési tartomány széllein határértékek:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 3}{2 - x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 3}{2 - x} = \frac{1}{0^+} = \infty \end{aligned}$$

Az $x = 2$ függőleges aszimptóta.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3}{2 - x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3}{2 - x} = \infty \end{aligned}$$

Nincs vízszintes aszimptota.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \frac{3}{x}}{2 - x} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3 + 2x - x^2}{2 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3 + 2x}{2 - x} = -2 \end{aligned}$$

így a ferde aszimptota a $+\infty$ -ben $y = -x - 2$. Hasonló számolással kapjuk, hogy a $-\infty$ -ben ugyanez az egyenes.

5. első derivált: $f'(x) = \frac{2x(2-x) + (x^2-3)}{(2-x)^2} = \frac{4x - x^2 - 3}{(2-x)^2}$,

melynek $x = 3$ és $x = 1$ a zérushelyei.

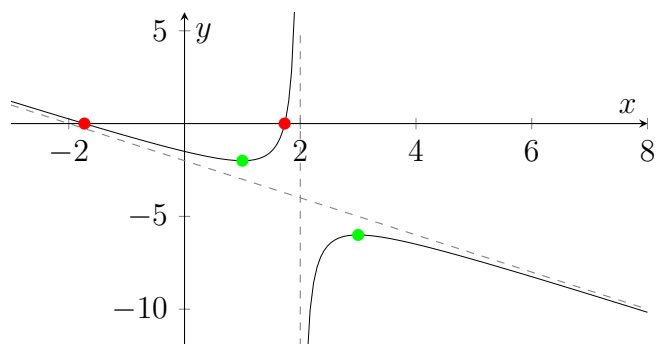
x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 2)$	$(2, 3)$	3	$(3, +\infty)$
f'	-	0	+	+	0	-
f	\searrow	lok.min.	\nearrow	\nearrow	lok.max.	\searrow

A lokális minimum értéke: $f(1) = -2$, a lokális maximum értéke: $f(3) = -6$.

6. második derivált: $f''(x) = \frac{(4-2x)(2-x)^2 + (4x-x^2-3)2(2-x)}{(2-x)^4} = \frac{2}{(2-x)^3}$, melynek nincs zérushelye.

x	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
f''	+	-
f	∪	∩

7.



8. értékkészlet: $\mathbb{R} \setminus (-6, -2) = (-\infty, -6] \cup [-2, \infty)$.

$$(d) \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$$

1. értelmezési tartomány: $\mathbb{R} \setminus (2, 3) = (-\infty, 2] \cup [3, \infty)$

2. zérushely: $x = 2, 3$

3. paritás: $f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 5x + 6} \neq \pm f(x)$, tehát nincs paritása.

periodicitás: nem periodikus (pl. véges sok nullhely van).

4. értelmezési tartomány szélein határértékek:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{x^2 - 5x + 6} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x^2 - 5x + 6} = 0$$

Nincs függőleges aszimptóta.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6} = \infty$$

Nincs vízszintes aszimptóta.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - 5x + 6} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 6 - x^2}{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x} = -\frac{5}{2}$$

így a ferde aszimptota a $+\infty$ -ben $y = x - \frac{5}{2}$. Hasonló számolással kapjuk, hogy a $-\infty$ -ben az $y = -x + \frac{5}{2}$ egyenes.

5. első derivált: $f'(x) = \frac{2x - 5}{2\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$,

melynek $x = \frac{5}{2}$ a zérushelye.

x	$(-\infty, 2]$	$[3, +\infty)$
f'	-	+
f	\searrow	\nearrow

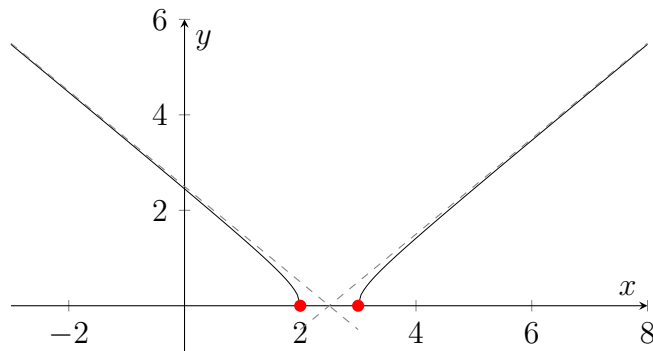
6. második derivált:

$$f''(x) = \frac{4\sqrt{x^2 - 5x + 6} - (2x - 5)\frac{2x - 5}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}}{4x^2 - 20x + 24} = \frac{4x^2 - 20x + 24 - (2x - 5)^2}{2^3\sqrt{x^2 - 5x + 6}^3} = -\frac{1}{4\sqrt{x^2 - 5x + 6}^3},$$

melynek nincs zérushelye.

x	$(-\infty, 2]$	$[3, \infty)$
f''	-	-
f	\frown	\frown

7.



8. értékkészlet: $[0, \infty)$.

$$(e) \quad f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

1. értelmezési tartomány: \mathbb{R}

2. zérushely: nincs

3. paritás: $f(-x) = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{1}{e^x + 1} \neq \pm f(x)$, tehát nincs paritása.

periodicitás: nem periodikus.

4. értelmezési tartomány szélein határértékek:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1 + e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{-x} + 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{0}{1 + 0} = 0$$

Nincs függőleges aszimptóta. Vízszintes aszimptota van a ∞ -ben: $y = 1$, a $-\infty$ -ben pedig $y = 0$. Ferde aszimptota nincs.

5. első derivált: $f'(x) = \frac{e^x(1 + e^x) - e^x \cdot e^x}{(1 + e^x)^2} = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$, melynek nincs zérushelye.

x	$(-\infty, +\infty)$
f'	+
f	\nearrow

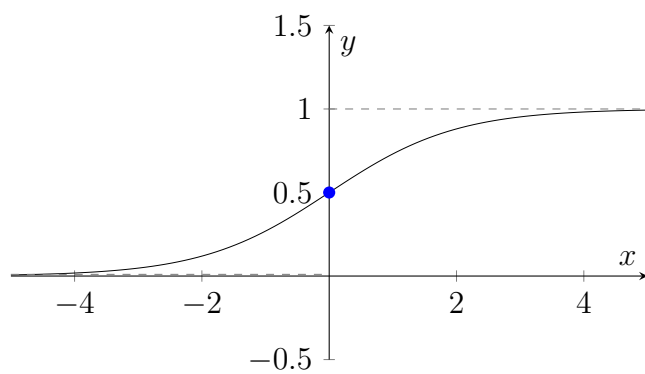
6. második derivált:

$$f''(x) = \frac{e^x(1 + e^x)^2 - 2e^{2x}(1 + e^x)}{(1 + e^x)^4} = \frac{e^x + 2e^{2x} + e^{3x} - 2e^{2x} - 2e^{3x}}{(1 + e^x)^4} = \frac{e^x - e^{3x}}{(1 + e^x)^4} = \frac{e^x(1 - e^x)}{(1 + e^x)^3},$$

melynek zérushelye az $x = 0$.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
f''	+	0	-
f	\smile	infl.	\frown

7.



8. értékkészlet: $(0, 1)$.

$$(f) \quad f(x) = xe^{-2x}$$

1. értelmezési tartomány: \mathbb{R}

2. zérushely: $x = 0$

3. paritás: $f(-x) = (-x)e^{2x} \neq \pm f(x)$, tehát nincs paritása.

periodicitás: nem periodikus.

4. értelmezési tartomány szélein határértékek:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{2x}} \underset{\text{L'H}}{\rightsquigarrow} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2e^{2x}} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-2x} = -\infty \cdot \infty = -\infty \end{aligned}$$

Nincs függőleges aszimptóta. Vízszintes aszimptóta van a ∞ -ben: $y = 1$. Ferde aszimptóta nincs.

5. első derivált: $f'(x) = \frac{e^{2x} - 2xe^{2x}}{e^{4x}} = \frac{1 - 2x}{e^{2x}}$, melynek zérushelye az $x = \frac{1}{2}$.

x	$(-\infty, 1/2)$	$1/2$	$(1/2, \infty)$
f'	+	0	-
f	\nearrow	lok.max.	\searrow

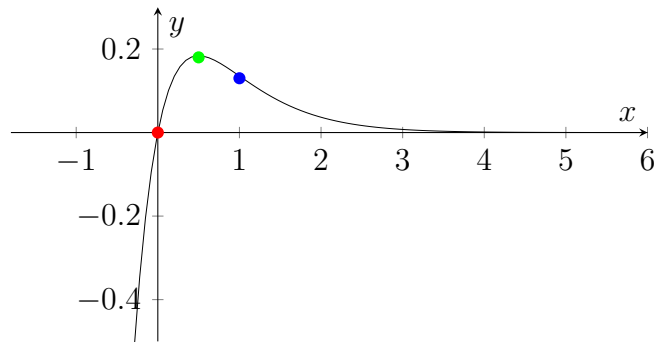
A lokális maximum értéke $f(1/2) = \frac{1}{2e}$.

6. második derivált:

$$f''(x) = \frac{-2e^{2x} - (1 - 2x)2e^{2x}}{e^{4x}} = \frac{4x - 4}{e^{2x}}, \text{ melynek zérushelye az } x = 1.$$

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, \infty)$
f'	-	0	+
f	\frown	infl.	\smile

7.



8. értékkészlet: $(-\infty, \frac{1}{2e})$.