

Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2025. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia

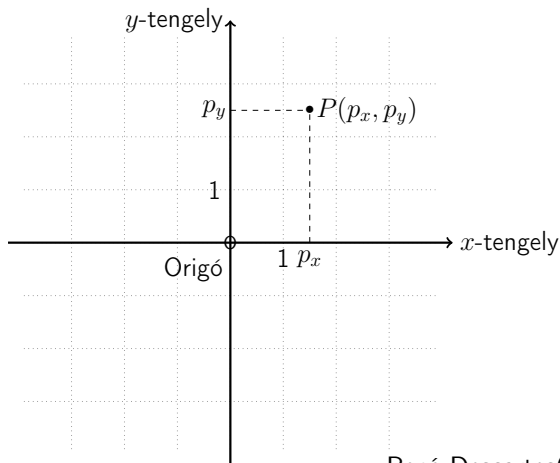
belus@math.bme.hu

geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

2. előadás:
Egyenesek, körök, parabolák
függvényábrázolás és
függvénytranszformációk

Derékszögű koordináta-rendszer: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Két egymásra merőleges valós számegyenes segítségével, melyek a 0-ban találkoznak (**origó**) a sík pontjait rendezett valós számpároknak feleltjük meg.



René Descartes(1596-1650)

Egyenesek egyenlete

Írjuk fel a $P(p_x, p_y)$ és a $Q(q_x, q_y)$ ponton átmenő egyenes egyenletét! Azaz azt az egyenletet, melynek megoldáshalmazát ábrázolva a koordináta-rendszerben pontosan a PQ egyenesén fekvő pontok halmazát kapjuk.

Az egyenes **meredeksége**: $q_y - p_y$ egységet emelkedünk, míg $q_x - p_x$ egységet megyünk jobbra, e kettő hányadosa a meredekség:

$$m = \frac{q_y - p_y}{q_x - p_x}, \quad \text{ha } p_x \neq q_x.$$

Az **egyenes egyenlete** általánosan

$$y - p_y = m(x - p_x),$$

melyet a $P(p_x, p_y)$ és a $Q(q_x, q_y)$ pontok koordinátapárjai is kielégítenek. (P és Q illeszkednek az egyenesre.)

Ha $p_x = q_x$, akkor P és Q , valamint minden egyenesre eső pont első koordinátája azonos, így $x = p_x (= q_x)$ egyenlet írja le a megfelelő függőleges egyenes pontjait.

Egyenesek egyenlete

Példa. Írjuk fel a $P(5, 1)$ és a $Q(2, 3)$ ponton átmenő egyenes egyenletét.

Egyenesek egyenlete

Példa. Írjuk fel a $P(5, 1)$ és a $Q(2, 3)$ ponton átmenő egyenes egyenletét.

Itt $p_x = 5, p_y = 1, q_x = 2, q_y = 3$.

A meredekség:

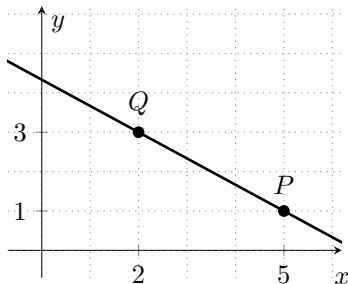
$$m = \frac{q_y - p_y}{q_x - p_x} = \frac{3 - 1}{2 - 5} = -\frac{2}{3}.$$

Az egyenes egyenlete $y - p_y = m(x - p_x)$,

azaz itt:

$$y - 1 = -\frac{2}{3}(x - 5)$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}.$$



Egyenesek egyenlete

Példa. Írjuk fel a $P(5, 1)$ és a $Q(2, 3)$ ponton átmenő egyenes egyenletét.

Itt $p_x = 5, p_y = 1, q_x = 2, q_y = 3$.

A meredekség:

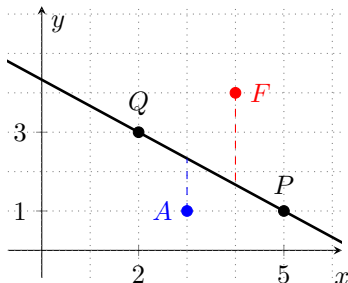
$$m = \frac{q_y - p_y}{q_x - p_x} = \frac{3 - 1}{2 - 5} = -\frac{2}{3}.$$

Az egyenes egyenlete $y - p_y = m(x - p_x)$,

azaz itt:

$$y - 1 = -\frac{2}{3}(x - 5)$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}.$$



Hogyan jellemezhetőek az egyenes alatti és feletti pontok?

Egyenes alatti pontok $A(a_x, a_y)$: $a_y < -\frac{2}{3}a_x + \frac{13}{3}$.

Egyenes feletti pontok $F(f_x, f_y)$: $f_y > -\frac{2}{3}f_x + \frac{13}{3}$.

Kör egyenlete

Egy $P(x, y)$ pont távolsága az origótól $\sqrt{x^2 + y^2}$. Így az origó középpontú, r sugarú kör egyenlete:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Kör egyenlete

Egy $P(x, y)$ pont távolsága az origótól $\sqrt{x^2 + y^2}$. Így az origó középpontú, r sugarú kör egyenlete:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Ha (a, b) a kör középpontja, akkor a ponttól mért r távolságra lévő pontok (x, y) koordinátái az $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ egyenletet elégítik ki.

Kör egyenlete

Egy $P(x, y)$ pont távolsága az origótól $\sqrt{x^2 + y^2}$. Így az origó középpontú, r sugarú kör egyenlete:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Ha (a, b) a kör középpontja, akkor a ponttól mért r távolságra lévő pontok (x, y) koordinátái az $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ egyenletet elégítik ki.

Példa. Az $(2, -1)$ középpontú, 3 sugarú kör egyenlete:

Kör egyenlete

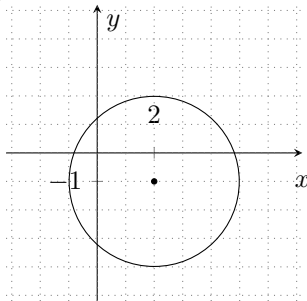
Egy $P(x, y)$ pont távolsága az origótól $\sqrt{x^2 + y^2}$. Így az origó középpontú, r sugarú kör egyenlete:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Ha (a, b) a kör középpontja, akkor a ponttól mért r távolságra lévő pontok (x, y) koordinátái az $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ egyenletet elégítik ki.

Példa. Az $(2, -1)$ középpontú, 3 sugarú kör egyenlete:

$$\begin{aligned}(x - 2)^2 + (y + 1)^2 &= 3^2 \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 &= 9 \\ x^2 - 4x + y^2 + 2y - 4 &= 0\end{aligned}$$



Kör egyenlete

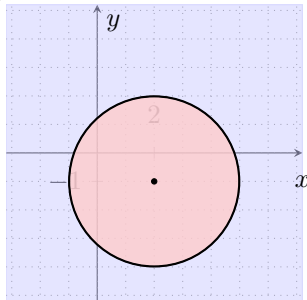
Egy $P(x, y)$ pont távolsága az origótól $\sqrt{x^2 + y^2}$. Így az origó középpontú, r sugarú kör egyenlete:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Ha (a, b) a kör középpontja, akkor a ponttól mért r távolságra lévő pontok (x, y) koordinátái az $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ egyenletet elégítik ki.

Példa. Az $(2, -1)$ középpontú, 3 sugarú kör egyenlete:

$$\begin{aligned}(x - 2)^2 + (y + 1)^2 &= 3^2 \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 &= 9 \\ x^2 - 4x + y^2 + 2y - 4 &= 0\end{aligned}$$



Ekkor az $x^2 - 4x + y^2 + 2y - 4 < 0$ egyenlőtlenség megoldási a körlap **belső** pontjainak halmaza, $x^2 - 4x + y^2 + 2y - 4 = 0$ a **körvonal** pontjainak halmaza, $x^2 - 4x + y^2 + 2y - 4 > 0$ a **körön kívül eső pontok** halmaza.

Kör egyenlete

Példa. Milyen alakzat az $x^2 - 6x + y^2 - 4y - 3 = 0$ egyenletet kielégítő pontok halmaza?

Kör egyenlete

Példa. Milyen alakzat az $x^2 - 6x + y^2 - 4y - 3 = 0$ egyenletet kielégítő pontok halmaza?

$$x^2 - 6x + y^2 - 4y - 3 = 0$$

$$(x - 3)^2 - 9 + (y - 2)^2 - 4 - 3 = 0$$

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$$

Ez egy $(3, 2)$ középpontú, 4 sugarú kör.

Kör egyenlete

Példa. Milyen alakzat az $x^2 - 6x + y^2 - 4y - 3 = 0$ egyenletet kielégítő pontok halmaza?

$$x^2 - 6x + y^2 - 4y - 3 = 0$$

$$(x - 3)^2 - 9 + (y - 2)^2 - 4 - 3 = 0$$

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$$

Ez egy $(3, 2)$ középpontú, 4 sugarú kör.

Hol találhatóak az $x^2 - 6x + y^2 - 4y - 3 \leq 0$ egyenlőtlenséget kielégítő pontok?

Kör egyenlete

Példa. Milyen alakzat az $x^2 - 6x + y^2 - 4y - 3 = 0$ egyenletet kielégítő pontok halmaza?

$$x^2 - 6x + y^2 - 4y - 3 = 0$$

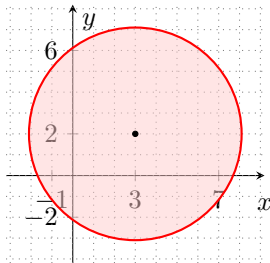
$$(x - 3)^2 - 9 + (y - 2)^2 - 4 - 3 = 0$$

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$$

Ez egy $(3, 2)$ középpontú, 4 sugarú kör.

Hol találhatóak az $x^2 - 6x + y^2 - 4y - 3 \leq 0$ egyenlőtlenséget kielégítő pontok?

A $(3, 2)$ középpontú, 4 sugarú kör körvona-
lának és körlapjának pontjai.



Parabolák

A síkon az $y = ax^2 + bx + c$ egyenletet kielégítő pontok mértani helyét **parabolának** nevezzük.

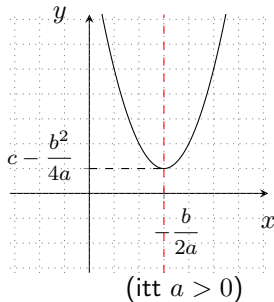
A fenti egyenlettel adott parabola **szimmetriatengelye** az $x = \frac{-b}{2a}$ függőleges egyenes, hiszen

$$y = ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a} \right)$$

A **csúcspontja** pedig a szimmetriatengely és a görbe metszéspontja:

$$x_c = \frac{-b}{2a}, \quad y_c = c - \frac{b^2}{4a},$$

(erre a pontra teljesül a parabola egyenlete és a tengelyegyenes egyenlete is).



Parabolák

Példa. Milyen alakzat az $y + x^2 - 4x + 3 = 0$ egyenletet kielégítő pontok halmaza?

Parabolák

Példa. Milyen alakzat az $y + x^2 - 4x + 3 = 0$ egyenletet kielégítő pontok halmaza?

$$y = -1 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 3 = -(x - 2)^2 + 1$$

Mivel $a = -1$, $b = 4$ és $c = -3$,

$$x = -4 / (2 \cdot (-1)) = 2$$

$$y = (-1) \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 3 = 1, \quad (2, 1) \text{ csúcspontú parabola.}$$

szimmetriatengelyű,

(2, 1) csúcspontú parabola.

Parabolák

Példa. Milyen alakzat az $y + x^2 - 4x + 3 = 0$ egyenletet kielégítő pontok halmaza?

$$y = -1 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 3 = -(x - 2)^2 + 1$$

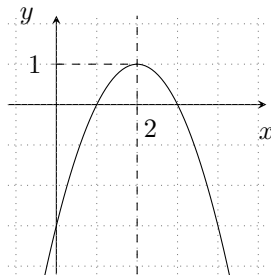
Mivel $a = -1$, $b = 4$ és $c = -3$,

$$x = -4 / (2 \cdot (-1)) = 2$$

$$y = (-1) \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 3 = 1,$$

szimmetriatengelyű,

$(2, 1)$ csúcspontú parabola.



Parabolák

Példa. Milyen alakzat az $y + x^2 - 4x + 3 = 0$ egyenletet kielégítő pontok halmaza?

$$y = -1 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 3 = -(x - 2)^2 + 1$$

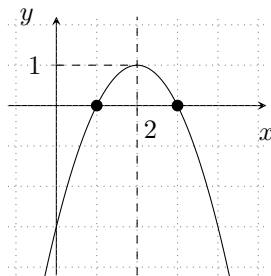
Mivel $a = -1$, $b = 4$ és $c = -3$,

$$x = -4 / (2 \cdot (-1)) = 2$$

$$y = (-1) \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 3 = 1,$$

szimmetriatengelyű,
(2, 1) csúcspontú parabola.

Az x -tengelyt az $y = 0$ koordinátájú pontokban metszi: $-x^2 + 4x - 3 = 0$ megoldásai $x_{1,2} = 1, 3$, ezért az (1, 0) és (3, 0) pontokon megy át a görbe.



Parabolák

Példa. Milyen alakzat az $y + x^2 - 4x + 3 = 0$ egyenletet kielégítő pontok halmaza?

$$y = -1 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 3 = -(x - 2)^2 + 1$$

Mivel $a = -1$, $b = 4$ és $c = -3$,

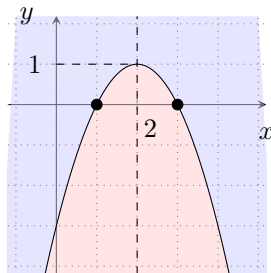
$$x = -4 / (2 \cdot (-1)) = 2$$

$$y = (-1) \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 3 = 1,$$

szimmetriatengelyű,
(2, 1) csúcspontú parabola.

Az x -tengelyt az $y = 0$ koordinátájú pontokban metszi: $-x^2 + 4x - 3 = 0$ megoldásai $x_{1,2} = 1, 3$, ezért az (1, 0) és (3, 0) pontokon megy át a görbe.

Ekkor az $y < -x^2 + 4x - 3$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza a **parabola alatti**, még $y > -x^2 + 4x - 3$ a **parabola feletti** pontok halmaza.



Összefoglaló: Koordinátageometria

- Hogyan írható fel általánosan a $P(x_p, y_p)$ és a $Q(x_q, y_q)$ pontokon áthaladó egyenes egyenlete?
- Írja fel a kör általános egyenletét!