

Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2025. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia

belus@math.bme.hu

geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

3. előadás:
Függvények elemi tulajdonságai.
Nevezetes függvények.
Függvények kompozíciója és invertálása.

Függvények

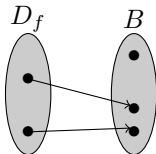
Egy **egyváltozós valós függvény** $f : D_f \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R}$, a D_f és B valós számhalmazok között létesít megfeleltetést úgy, hogy minden $x \in D_f$ elemhez **egyértelműen** rendel $y = f(x) \in B$ elemet. A függvény értékkészlete $R_f \subseteq B$ azon elemek halmaza, melyek függvényértékként előállnak. Jelölés: D_f - értelmezési tartomány, R_f - értékkészlet.

$$f : x \mapsto f(x).$$

A függvények hozzárendelési típusai lehetnek:

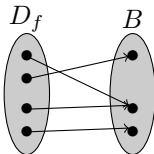
injektív

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$



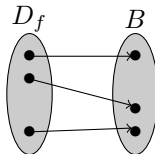
szürjektív

$$\forall y_1 \exists x_1 \Rightarrow y_1 = f(x_1)$$



bijektív

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \\ \wedge \forall y_1 \exists x_1 \Rightarrow y_1 = f(x_1)$$

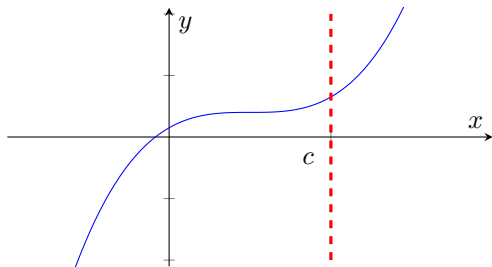


Függvénygrafikon

Ha $f : x \mapsto f(x)$ valós függvény, akkor a $\mathcal{G} = \{(x, f(x)) \mid x \in D_f\}$ valós számpárok halmaza a függvény **grafikonjának** pontjai a koordináta-rendszerben.

Ha az (x, y) pont **illeszkedik** egy f valós függvény grafikonjára, akkor az adott pont koordinátái kielégítik az $y = f(x)$ egyenletet.

Mivel a függvényhozzárendelésben minden x értékhez egyértelműen rendelünk $y = f(x)$ értéket, ezért minden függőleges egyenes ($x = c$) legfeljebb egyszer metszheti át a függvény grafikonját (**vertikális teszt**).



Függvények értelmezési tartománya

Valós függvények **természetes értelmezési tartományán** azt a legbővebb valós számhalmazt értjük, melynek elemeire kiszámítható a függvényérték.

Néhány egyszerűbb függvény értelmezési tartománya és értékkészlete:

$f(x)$	D_f	R_f
$a \cdot x + b$	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \infty)$
x^2	$(-\infty, \infty)$	$[0, \infty)$
$1/x$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$\sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$

Nevezetes függvények - Az abszolútérték-függvény

Definíció: Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ abszolútérték-függvény az a hozzárendelés, mely minden valós $x \in \mathbb{R}$ számhoz a szám abszolútértékét rendeli, azaz

$$f : x \mapsto f(x) := |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

nem injektív, mert például $|1| = |-1| = 1$, és $R_f = [0, \infty)$.

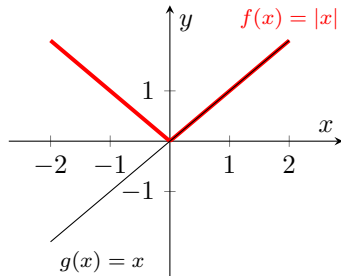
Nevezetes függvények - Az abszolútérték-függvény

Definíció: Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ abszolútérték-függvény az a hozzárendelés, mely minden valós $x \in \mathbb{R}$ számhoz a szám abszolútértékét rendeli, azaz

$$f : x \mapsto f(x) := |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

nem injektív, mert például $|1| = |-1| = 1$, és $R_f = [0, \infty)$.

Grafikonját úgy kaphatjuk meg, hogy tekintjük a $g(x) = x$ függvényt, majd ennek a függvénynek az x -tengely alatti pontjait tükrözzük az x -tegelyre.



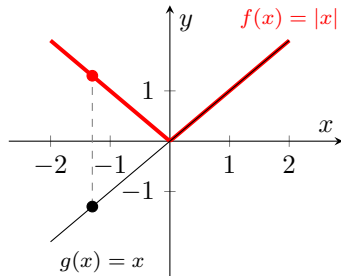
Nevezetes függvények - Az abszolútérték-függvény

Definíció: Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ abszolútérték-függvény az a hozzárendelés, mely minden valós $x \in \mathbb{R}$ számhoz a szám abszolútértékét rendeli, azaz

$$f : x \mapsto f(x) := |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

nem injektív, mert például $|1| = |-1| = 1$, és $R_f = [0, \infty)$.

Grafikonját úgy kaphatjuk meg, hogy tekintjük a $g(x) = x$ függvényt, majd ennek a függvénynek az x -tengely alatti pontjait tükrözzük az x -tegelyre.



Nevezetes függvények - Az abszolútérték-függvény

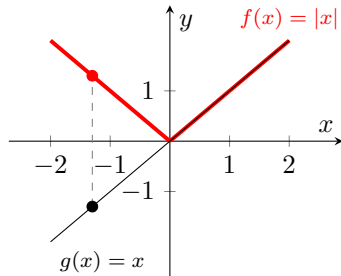
Definíció: Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ abszolútérték-függvény az a hozzárendelés, mely minden valós $x \in \mathbb{R}$ számhoz a szám abszolútértékét rendeli, azaz

$$f : x \mapsto f(x) := |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

nem injektív, mert például $|1| = |-1| = 1$, és $R_f = [0, \infty)$.

Grafikonját úgy kaphatjuk meg, hogy tekintjük a $g(x) = x$ függvényt, majd ennek a függvénynek az x -tengely alatti pontjait tükrözzük az x -tegelyre.

Megjegyzés: Ezzel a módszerrel bármely függvényhozzárendelés abszolútértékének grafikonja is megrajzolható!



Függvénytulajdonságok - Paritás

Az $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény

- **páros**, ha $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$, és $f(-x) = f(x)$.
A grafikon az y tengelyre tükrös.
- **páratlan**, ha $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$, és $f(-x) = -f(x)$.
A grafikon az origóra tükrös.

Példák:

$x^2, |x|$: páros

x, x^3 : páratlan

Páros függvények összege is páros, páratlan függvények összege is páratlan!

A paritás vizsgálatát csak akkor hajtjuk végre, ha az értelmezési tartomány a nullára szimmetrikusan helyezkedik el a számegyenesen.

Függvénytulajdonságok - Monotonitás

Az f függvény egy $I = (a, b) \subseteq D_f$ intervallumon

- **monoton nő**, ha $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
- **szigorúan monoton nő**, ha $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- **monoton csökken**, ha $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.
- **szigorúan mon. csökken**, ha $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
- **monoton**, ha $f(x)$ az I -n monoton nő vagy monoton csökken.
- **szigorúan monoton**, ha $f(x)$ az I -n szigorúan monoton nő vagy szigorúan monoton csökken.

Példák:

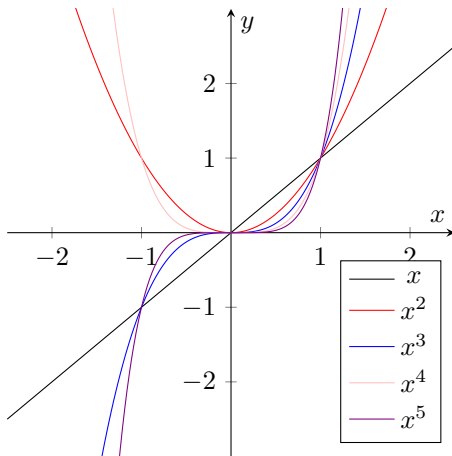
$f(x) = x$ szigorúan monoton nő $\mathbb{R}$ -en.

$g(x) = x^2$ szigorúan monoton csökken $(-\infty, 0]$ -n, és szigorúan monoton nő $[0, +\infty)$ -n, de $\mathbb{R}$ -en nem monoton.

Ha egy függvény egyszerre monoton nő és monoton csökken egy intervallumon, akkor az az intervallumon konstans függvény.

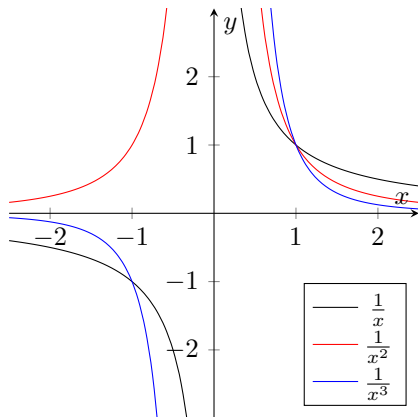
Nevezetes függvények - Hatványfüggvények

Az $f(x) = x^n$ függvény ($n \in \mathbb{Z}^+$) értelmezési tartománya $D_f = \mathbb{R}$ a teljes valós számok halmaza. Grafikonja páros n esetén parabolához hasonlít, páros függvény. Páratlan n esetén monoton növekvő a függvény, grafikonja $n \geq 3$ esetén az x^3 grafikonjához hasonlít, páratlan függvény.



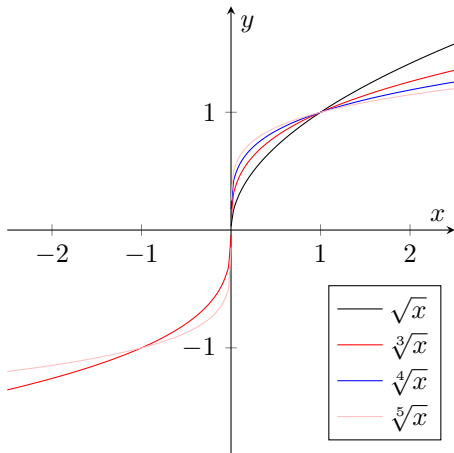
Nevezetes függvények - Hatványfüggvények negatív kitevővel

Az $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ függvény ($n \in \mathbb{Z}^+$) értelmezési tartományából kizárjuk a nullát $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Grafikonja páratlan n esetén páratlan, hiperbolához hasonló ($n = 1$ -re hiperbola), és teljes D_f -en monoton csökken a függvény. Páros n -re páros a függvény, ilyenkor $(-\infty, 0)$ -on monoton növekvő, $(0, \infty)$ -on monoton csökkenő.



Nevezetes függvények - Gyökfüggvények (tört kitevők)

Az $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ függvény páros n esetén csak a nemnegatív értékekre van értelmezve $D_f = [0, \infty)$. Páratlan n esetén $D_f = \mathbb{R}$, páratlan függvény. Minden $n \in \mathbb{Z}^+$ -re a gyökfüggvények a teljes értelmezési tartományukon monoton növekedők.



Függvényábrázolás transzformációkkal 1.

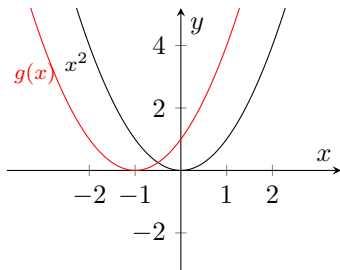
Példa. Ábrázoljuk az $f(x) = (x + 1)^2 - 3$ függvény grafikonját.

Függvényábrázolás transzformációkkal 1.

Példa. Ábrázoljuk az $f(x) = (x + 1)^2 - 3$ függvény grafikonját.

A $g(x) = (x + 1)^2$ függvény grafikonját a x^2 függvény grafikonjának 1 egységgel való balra tolásával kapjuk.

Általánosan: ha x helyére $(x - a)$ -t (vagy $(x + a)$ -t) írunk a függvénybe $a > 0$ esetén, akkor a grafikont a -val balra (jobbra) toljuk.



Függvényábrázolás transzformációkkal 1.

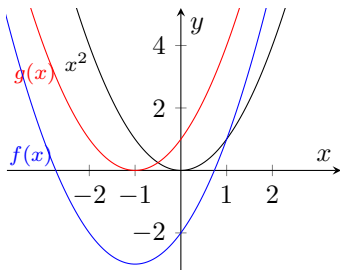
Példa. Ábrázoljuk az $f(x) = (x + 1)^2 - 3$ függvény grafikonját.

A $g(x) = (x + 1)^2$ függvény grafikonját a x^2 függvény grafikonjának 1 egységgel való balra tolásával kapjuk.

Általánosan: ha x helyére $(x - a)$ -t (vagy $(x + a)$ -t) írunk a függvénybe $a > 0$ esetén, akkor a grafikont a -val balra (jobbra) toljuk.

Az $f(x) = (x + 1)^2 - 3$ függvény grafikonját a $g(x)$ függvény grafikonjának 3-mal való lefelé tolásával kapjuk.

Általánosan: ha az $f(x)$ -hez hozzáadunk (levonunk) $b > 0$ -t, akkor a grafikont b -vel felfelé (lefelé) toljuk.



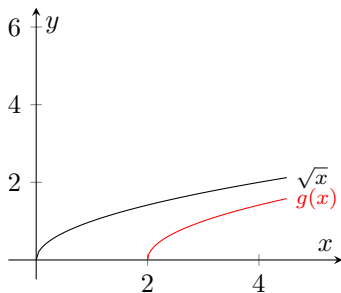
Függvényábrázolás transzformációkkal 2.

Példa. Ábrázoljuk az $f(x) = 3\sqrt{x-2}$ függvény grafikonját.

Függvényábrázolás transzformációkkal 2.

Példa. Ábrázoljuk az $f(x) = 3\sqrt{x-2}$ függvény grafikonját.

A $g(x) = \sqrt{x-2}$ függvény grafikonját a $\sqrt{x}$ függvény grafikonjának 2 egységgel való jobbra tolásával kapjuk.



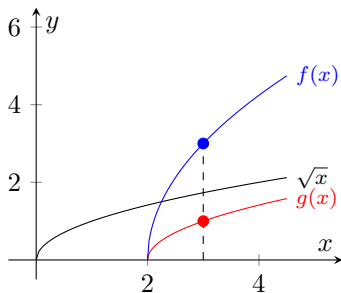
Függvényábrázolás transzformációkkal 2.

Példa. Ábrázoljuk az $f(x) = 3\sqrt{x-2}$ függvény grafikonját.

A $g(x) = \sqrt{x-2}$ függvény grafikonját a $\sqrt{x}$ függvény grafikonjának 2 egységgel való jobbra tolásával kapjuk.

Az $f(x) = 3\sqrt{x-2}$ függvény grafikonját a $g(x)$ függvény grafikonjának y irányú 3-szorosára nyújtásával kapjuk.

Általánosan: ha az $f(x)$ -et szorozzuk (osztjuk) $b > 1$ számmal, akkor a grafikont az y -tengely irányába nyújtjuk (összenyomjuk).



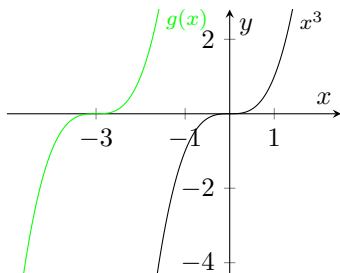
Függvényábrázolás transzformációkkal 3.

Példa. Ábrázoljuk az $f(x) = 1 - (x + 3)^3$ függvény grafikonját.

Függvényábrázolás transzformációkkal 3.

Példa. Ábrázoljuk az $f(x) = 1 - (x + 3)^3$ függvény grafikonját.

A $g(x) = (x + 3)^3$ függvény grafikonját az x^3 függvény grafikonjának 3 egységgel való balra tolásával kapjuk.



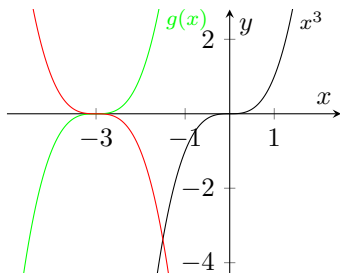
Függvényábrázolás transzformációkkal 3.

Példa. Ábrázoljuk az $f(x) = 1 - (x + 3)^3$ függvény grafikonját.

A $g(x) = (x + 3)^3$ függvény grafikonját az x^3 függvény grafikonjának 3 egységgel való balra tolásával kapjuk.

A $h(x) = -(x + 3)^3$ függvény grafikonját a $g(x)$ függvény grafikonjának x -tengelyre tükrözésével kapjuk.

Általánosan: ha az $f(x)$ -et -1 -gyel szorozzuk, akkor a grafikont az x -tengelyre tükrözzük.



Függvényábrázolás transzformációkkal 3.

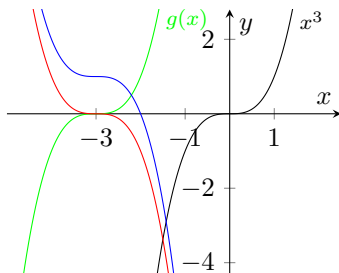
Példa. Ábrázoljuk az $f(x) = 1 - (x + 3)^3$ függvény grafikonját.

A $g(x) = (x + 3)^3$ függvény grafikonját az x^3 függvény grafikonjának 3 egységgel való balra tolásával kapjuk.

A $h(x) = -(x + 3)^3$ függvény grafikonját a $g(x)$ függvény grafikonjának x -tengelyre tükrözésével kapjuk.

Általánosan: ha az $f(x)$ -et -1 -gyel szorozzuk, akkor a grafikont az x -tengelyre tükrözzük.

Végül az $f(x) = 1 - (x + 3)^3$ függvény grafikonját a $h(x)$ függvény grafikonjának 1-gyel való felfelé tolásával kapjuk.



Függvénykompozíció

Ha $g : A \rightarrow B'$ és $f : B \rightarrow C$, ahol $B' \subseteq B$, akkor f és g ebben a sorrendben vett **kompozíciója**

$$f \circ g : A \rightarrow C$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

A f a **külső**, míg g a **belső függvény**.

Ha $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ és $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f, D_g \subseteq \mathbb{R}$), akkor az $f \circ g$ összetett függvény értelmezési tartománya:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in D_g \text{ és } g(x) \in D_f\}.$$

Példa: $f(x) = \sqrt{x}$ és $g(x) = 2x + 1$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + 1) = \sqrt{2x + 1} \qquad 2x + 1 \geq 0, (x \geq -1/2)$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} + 1 \qquad x \geq 0$$

Függvénykompozíció - Példa

Az előző példa szemléletesen:

Az

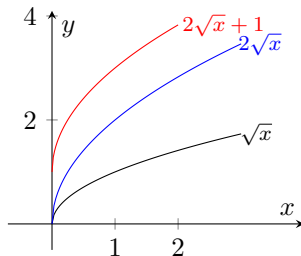
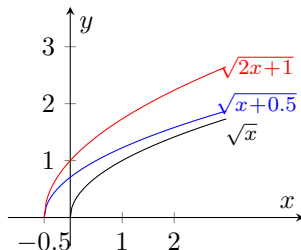
$$f(g(x)) = \sqrt{2x+1} = \sqrt{2\left(x + \frac{1}{2}\right)}$$

függvény grafikonját a $\sqrt{x}$ függvényt $\frac{1}{2}$ -del balra tolva, majd $\sqrt{2}$ -vel függőlegesen nyújtva kapjuk.

A

$$g(f(x)) = 2\sqrt{x} + 1$$

függvény grafikonját a $\sqrt{x}$ függvényt 2-vel függőlegesen nyújtva, majd 1-gyel felfelé tolva kapjuk.



Függvények invertálása

Az $f^{-1} : R_f \rightarrow D_f$ függvény az $f : x \mapsto f(x)$, $D_f \rightarrow R_f$ injektív függvény **inverze**, ha bármely $y \in R_f$ elemhez azt az x -et rendeli hozzá, melyre $f(x) = y$.

Az f^{-1} inverz függvény értelmezési tartománya az f függvény értékkészlete.

A definícióból az következik, hogy $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$.

Ha f függvény grafikonját tengelyesen tükrözzük az $y = x$ egyenesre, akkor pontosan f^{-1} grafikonját kapjuk.

Egyszerűbb példák:

$f(x) = |x|$ nem injektív, így nincs inverze.

$f(x) = x$ inverze önmaga: $f^{-1}(x) = x$.

$f(x) = ax + b$ inverze $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$, ha $a \neq 0$ (köv. példa).

$f(x) = x^2$ nem injektív, de ha csak a $[0, +\infty)$ intervallumon értelmezzük, akkor injektív, és az inverze: $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Függvények invertálása

Példa. Az $f(x) = 3x + 1$ függvény inverze:

Függvények invertálása

Példa. Az $f(x) = 3x + 1$ függvény inverze:

$$f(x) = y$$

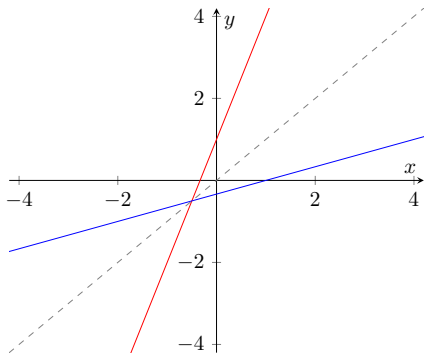
$$3x + 1 = y$$

$$3x = y - 1$$

$$x = \frac{y - 1}{3},$$

tehát $f^{-1}(y) = \frac{y - 1}{3}$, azaz

$$f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{3}.$$



Függvények invertálása

Példa: A $g(x) = \sqrt{x-1}$, $x \geq 1$ függvény inverze

Függvények invertálása

Példa: A $g(x) = \sqrt{x-1}$, $x \geq 1$ függvény inverze

$$g(x) = y$$

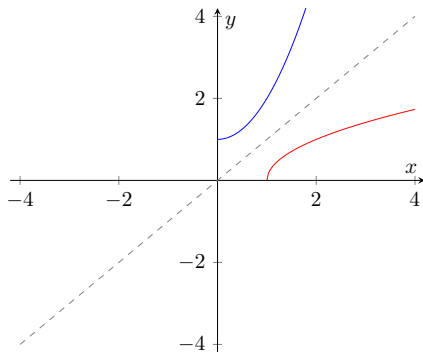
$$\sqrt{x-1} = y$$

$$y^2 = x - 1$$

$$y^2 + 1 = x, x \geq 1 \rightarrow y \geq 0$$

tehát $g^{-1}(y) = y^2 + 1$, $y \geq 0$, azaz

$$g^{-1}(x) = x^2 + 1, x \geq 0$$



Összefoglaló: Függvények

- Mit nevezünk egyváltozós valós függvénynek? Mondja ki a definíciót!
- Hogyan definiáljuk egy valós függvény grafikonját, mikor mondjuk, hogy egy $P(x, y)$ pont illeszkedik a grafikonra?
- Fogalmazza meg, hogy mikor nevezünk egy függvényt párosnak/páratlannak, adjon példát páros/páratlan függvényre!
- Mikor nevezünk egy függvényt (szigorúan) monoton csökkenőnek/növekvőnek egy adott intervallumon? Adjon példát!
- Mit értünk azon, hogy az f függvény invertálható, és hogyan definiálja f^{-1} -et?