

Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2025. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia

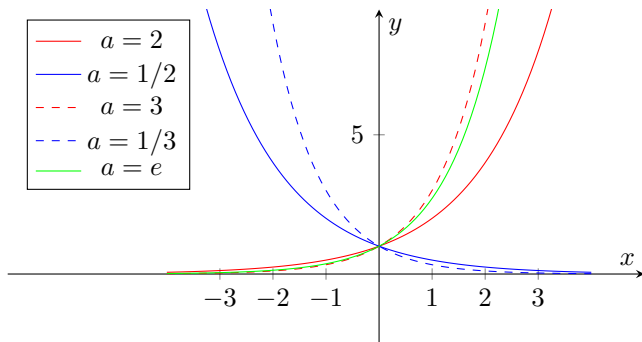
belus@math.bme.hu

geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

4. előadás:
Exponenciális és logaritmus függvény.
Trigonometrikus függvények és inverzeik.

Nevezetes függvények - Exponenciális függvény

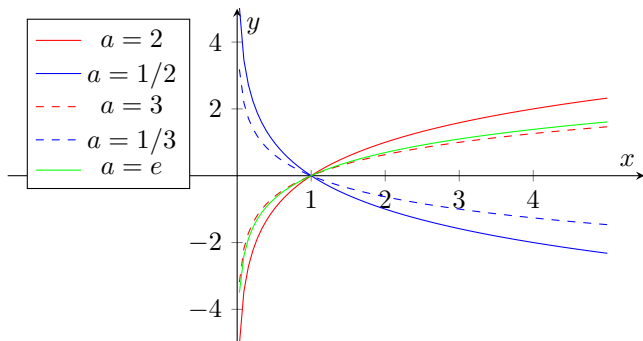
Az $f(x) = a^x$ függvényt exponenciális függvénynek nevezzük, ahol $a > 0$ és $a \neq 1$. Értelmezési tartománya $\mathbb{R}$, még értékkészlete $(0, \infty)$. $a > 1$ esetén monoton növekvő, még $a < 1$ esetén monoton csökkenő a függvény.



Az $a = e = 2,718281828459 \dots$ esetén gyakran nevezzük a függvényt „az” exponenciális függvénynek (jelölés: e^x).

Logaritmusfüggvény

Az $f(x) = \log_a(x)$ függvényt "a"-alapú logaritmusfüggvénynek nevezzük, ahol $a > 0$ és $a \neq 1$. A logaritmusfüggvény az exponenciális függvény inverze. Ezért értelmezési tartománya a $(0, \infty)$, értékkészlete $\mathbb{R}$. $a > 1$ esetén monoton növvő, még $a < 1$ esetén monoton csökkenő a függvény.



Az $a = e = 2,718281828459 \dots$ esetén természetes alapú logaritmusfüggvénynek nevezzük (jelölés: $\ln(x)$).

Exponenciális és logaritmikus azonosságok

$$a^0 = 1$$

$$\log_a(1) = 0$$

$$a^1 = a$$

$$\log_a(a) = 1$$

$$a^{x+y} = a^x a^y$$

$$(\text{ha } a^x = b \quad \log_a(bc) = \log_a(b) + \log_a(c)$$

$$a^{xy} = (a^x)^y$$

$$\text{és } a^y = c) \quad \log_a(b^y) = y \cdot \log_a(b)$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$$

$$\log_a\left(\frac{1}{b}\right) = -\log_a(b)$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$$

$$a^x b^x = (ab)^x$$

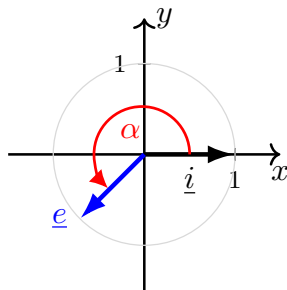
$$\log_a(b) = \frac{\log_z(b)}{\log_z(a)}$$

(Itt $a > 0$ és $a \neq 1$, és $z > 0$ és $z \neq 1$.)

Kitérő: Sinus és cosinus értelmezése általánosan (Forgó egységvektor)

Ha a derékszögű koordináta-rendszerben az $\underline{i}(1,0)$ vektort α szöggel az origó körül pozitív irányban (az óramutató járásával ellentétesen) elforgatom, akkor egy meghatározott $\underline{e}$ egységvektort kapok.

Egy ilyen egységvektorhoz azonban nem csak egy, hanem végtelen sok irányszög tartozik, hiszen $\alpha + k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$ szöggel való forgatás ugyanazt az $\underline{e}$ vektort eredményezi.



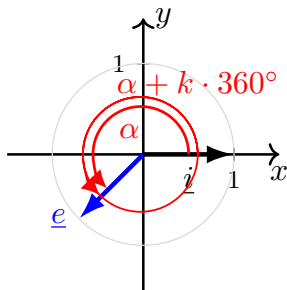
Kitérő: Sinus és cosinus értelmezése általánosan (Forgó egységvektor)

Ha a derékszögű koordináta-rendszerben az $\underline{i}(1,0)$ vektort α szöggel az origó körül pozitív irányban (az óramutató járásával ellentétesen) elforgatom, akkor egy meghatározott $\underline{e}$ egységvektort kapok.

Egy ilyen egységvektorhoz azonban nem csak egy, hanem végtelen sok irányszög tartozik, hiszen $\alpha + k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$ szöggel való forgatás ugyanazt az $\underline{e}$ vektort eredményezi.

Ekkor általánosan az α (és $\alpha + k \cdot 360^\circ$) szögű elforgatáshoz tartozó $\underline{e}(e_x, e_y)$ vektor koordinátáit nevezzük a szög koszinuszának illetve szinuszának:

$$\cos(\alpha) := e_x, \quad \sin(\alpha) := e_y.$$



Kitérő: Sinus és cosinus értelmezése általánosan (Forgó egységvektor)

Ha a derékszögű koordináta-rendszerben az $\underline{i}(1,0)$ vektort α szöggel az origó körül pozitív irányban (az óramutató járásával ellentétesen) elforgatom, akkor egy meghatározott $\underline{e}$ egységvektort kapok.

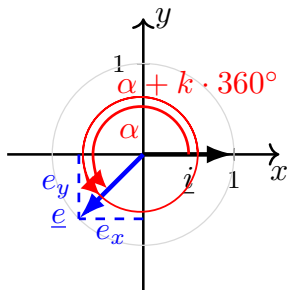
Egy ilyen egységvektorhoz azonban nem csak egy, hanem végtelen sok irányszög tartozik, hiszen $\alpha + k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$ szöggel való forgatás ugyanazt az $\underline{e}$ vektort eredményezi.

Ekkor általánosan az α (és $\alpha + k \cdot 360^\circ$) szögű elforgatáshoz tartozó $\underline{e}(e_x, e_y)$ vektor koordinátáit nevezzük a szög koszinuszának illetve szinuszának:

$$\cos(\alpha) := e_x, \quad \sin(\alpha) := e_y.$$

Az α (és $\alpha + k \cdot 360^\circ$) szög tangense illetve kotangense pedig ebből:

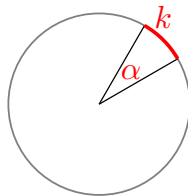
$$\operatorname{tg}(\alpha) := \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \quad (\cos(\alpha) \neq 0), \quad \operatorname{ctg}(\alpha) := \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \quad (\sin(\alpha) \neq 0).$$



Kitérő: Szögek mérése radiánban

A kör egy ívdarabjának hossza arányos a hozzá tartozó középponti szöggel.

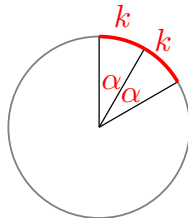
Ez azt jelenti, hogy ha α középponti szöghöz k hosszúságú ív tartozik, akkor



Kitérő: Szögek mérése radiánban

A kör egy ívdarabjának hossza arányos a hozzá tartozó középponti szöggel.

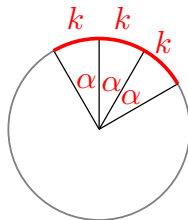
Ez azt jelenti, hogy ha α középponti szöghöz k hosszúságú ív tartozik, akkor 2α -hoz $2k$,



Kitérő: Szögek mérése radiánban

A kör egy ívdarabjának hossza arányos a hozzá tartozó középponti szöggel.

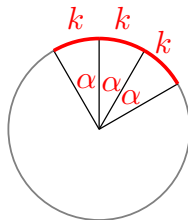
Ez azt jelenti, hogy ha α középponti szöghöz k hosszúságú ív tartozik, akkor 2α -hoz $2k$, 3α -hoz $3k$ stb. ívhosszt mérhetünk.



Kitérő: Szögek mérése radiánban

A kör egy ívdarabjának hossza arányos a hozzá tartozó középponti szöggel.

Ez azt jelenti, hogy ha α középponti szöghöz k hosszúságú ív tartozik, akkor 2α -hoz $2k$, 3α -hoz $3k$ stb. ívhosszt mérhetünk.

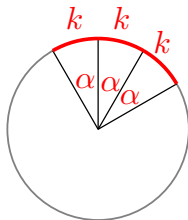


Az egységkörön α szöghöz tartozó körív hossza a szög ívmértéke lesz. Mivel az egységkör teljes kerülete $2 \cdot 1 \cdot \pi$, ezért

Kitérő: Szögek mérése radiánban

A kör egy ívdarabjának hossza arányos a hozzá tartozó középponti szöggel.

Ez azt jelenti, hogy ha α középponti szöghöz k hosszúságú ív tartozik, akkor 2α -hoz $2k$, 3α -hoz $3k$ stb. ívhosszt mérhetünk.



Az egységgörön α szöghöz tartozó körív hossza a szög ívmértéke lesz. Mivel az egységgör teljes kerülete $2 \cdot 1 \cdot \pi$, ezért

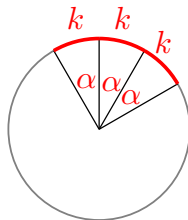
- 360° ívmértéke 2π ,
- 180° ívmértéke π ,
- 90° ívmértéke $\frac{\pi}{2}$ stb. lesz.

Így 1° -hoz $\frac{\pi}{180} \approx 0,0175$ ívmérték tartozik.

Kitérő: Szögek mérése radiánban

A kör egy ívdarabjának hossza arányos a hozzá tartozó középponti szöggel.

Ez azt jelenti, hogy ha α középponti szöghöz k hosszúságú ív tartozik, akkor 2α -hoz $2k$, 3α -hoz $3k$ stb. ívhosszt mérhetünk.



Az egységgörön α szöghöz tartozó körív hossza a szög ívmértéke lesz. Mivel az egységgör teljes kerülete $2 \cdot 1 \cdot \pi$, ezért

- 360° ívmértéke 2π ,
- 180° ívmértéke π ,
- 90° ívmértéke $\frac{\pi}{2}$ stb. lesz.

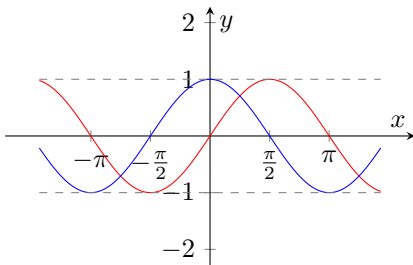
Így 1° -hoz $\frac{\pi}{180} \approx 0,0175$ ívmérték tartozik.

Az ívmérték egysége az 1 radián (annak a szögnek az ívmértéke, mely az egységgör 1 hosszú ívéhez tartozik).

Trigonometrikus függvények

A $\sin(x)$, $\cos(x)$ függvényeket úgy értelmezzük, hogy $x \in \mathbb{R}$ radiánban mért szögértékhez a függvény a szög szinuszt/koszinuszt rendel.

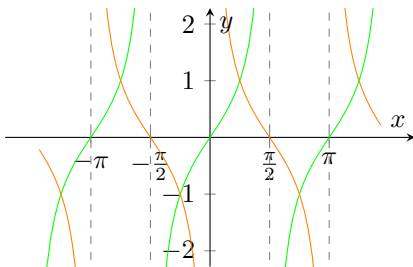
Ezek a függvények minden valós számon értelmezve vannak, és ± 1 között vesznek fel értékeket.



A $\tan(x)$, $\cot(x)$ függvények definíció szerint x radiánhoz tartozó megfelelő hányadosok értékei.

$D_{\tan} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, és minden függvényág monoton nő.

$D_{\cot} = (0, \pi) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, és minden függvényág monoton csökken.



Függvénytulajdonságok - Korlátosság

Az $f : I = [a, b] \subseteq D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény

- **alulról korlátos**, ha van olyan $k \in \mathbb{R}$, hogy $f(x) \geq k$ minden $x \in I$ esetén (k **alsó korlát**). $\leadsto$ **legnagyobb alsó korlát**
- **felülről korlátos**, ha van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy $f(x) \leq K$ minden $x \in I$ esetén (K **felső korlát**). $\leadsto$ **legkisebb felső korlát**
- **korlátos**, ha alulról és felülről korlátos, azaz van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy $|f(x)| \leq K$ minden $x \in I$ esetén.

Példák:

$f(x) = |x|$ alulról korlátos D_f -en, legnagyobb alsó korlát a 0, de felülről nem korlátos, így nem is korlátos.

$g(x) = \sin(x)$ alulról korlátos, legnagyobb alsó korlát -1 , felülről korlátos, legkisebb felső korlát a 1, így korlátos is.

Függvénytulajdonságok - Periodikus függvények

Az $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény **periodikus** (p szerint), ha létezik $p \neq 0$ úgy, hogy $x \in D_f$ esetén $x \pm p \in D_f$ és $f(x + p) = f(x)$.

Ha egy függvény p szerint periodikus, akkor $k \cdot p$ szerint is periodikus, ahol $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

A legkisebb pozitív számot, mely szerint f periodikus, f **periódusának** nevezzük (ha van).

Példák:

$\sin(x), \cos(x)$: 2π szerint periodikus.

$\operatorname{tg}(x)$: π szerint periodikus.

$\{x\} : (\text{többrész}) = x - [x]$ (egészrész) függvény: 1 szerint periodikus

Egy példa, amikor nincs periódushossz, de a függvény periodikus: a Dirichlet-függvény

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \\ 1, & \text{ha } x \text{ racionális.} \end{cases}$$

Sinus és Cosinus inverze

$\sin(x)$ nem injektív, de

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

tartományon már igen, itt vehetjük az inverzét:

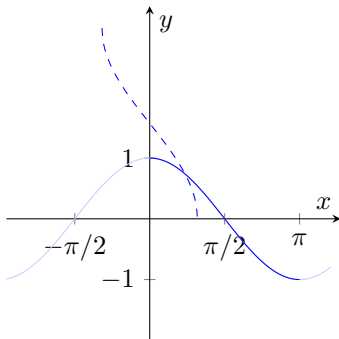
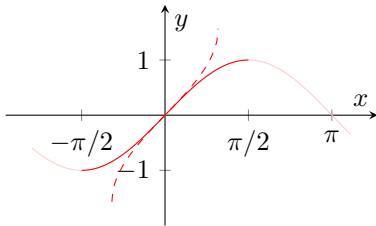
$$\arcsin(x) : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Hasolnlóan a $\cos(x)$,

$$[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

tartományon már bijektív, itt vehetjük az inverzét:

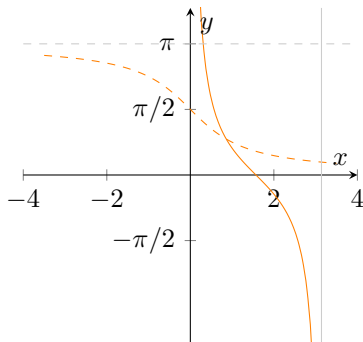
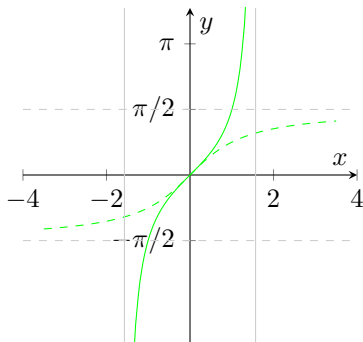
$$\arccos(x) : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$



Tangens, cotangens függvények inverze

A **tg**(x) függvényt a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ -re kell megszorítani, hogy injektív legyen.
Itt az inverze: **arctg**(x) : $\mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Korlátos, $R_{arctg} = [-\pi/2, \pi/2]$.

A **ctg**(x) függvényt a $(0, \pi)$ -re kell megszorítani, hogy injektív legyen.
Itt az inverze: **arcctg**(x) : $\mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$. Korlátos, $R_{arcctg} = [0, \pi]$.



Összefoglaló: Függvénytulajdonságok és trigonometrikus függvények

- Mikor nevezünk egy függvényt (alulról/felülről) korlátosnak egy adott intervallumon? Adjon példát!
- Fogalmazza meg, hogy mikor nevezünk egy függvényt periodikusnak, adjon példát periodikus függvényre!
- Hogyan definiáljuk a $\sin(x)$ és $\cos(x)$ függvények inverzfüggvényét? Vázolja a grafikonjukat!