

Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2025. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia

belus@math.bme.hu

geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

6. előadás:
Numerikus sorozatok:
monotonitás, korlátosság, konvergencia,
torlódási pont,
műveletek numerikus sorozatokkal

Valós számsorozatok

Önmagukban ritkán fordulnak elő az alkalmazásokban, de megalapozzák a függvények vizsgálatát, differenciálszámítást, integrálszámítást.

Azokat a függvényeket, melyek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza ($\mathbb{Z}^+$) és értékkészlete a valós számok halmaza ($\mathbb{R}$), **valós számsorozatoknak** nevezzük.

$$\mathbb{Z}^+ \ni n \mapsto a_n \in \mathbb{R}$$

a_n - a sorozat n -dik eleme, megadja az általános hozzárendelési szabályt

$\{a_n\}$ - a sorozat maga, összes elemével

Megadás:

- hozzárendelési szabállyal

$$n \mapsto 2n - 5 : \{-3, -1, 1, 3, \dots, 2n - 5, \dots\}$$

- rekurzióval $a_1 = a_2 = 1, a_{n+1} = a_n + a_{n-1} : \{1, 1, 2, 3, 5, \dots\}$
(Fibonacci)

Monotonitás

Azt mondjuk, hogy egy $\{a_n\}$ számsorozat **monoton növekvő (csökkenő)**, ha minden n esetén $a_n \leq (\geq) a_{n+1}$.

Továbbá egy $\{a_n\}$ számsorozat **szigorúan monoton növekvő (csökkenő)**, ha minden n esetén $a_n < (>) a_{n+1}$.

Monotonnak nevezzük a sorozatot akkor is, ha csak $n > N$ indextől kezdve teljesíti a monotonitás feltételét (azaz az első néhány elemre nem monoton).

Szigorúan monoton sorozat egyben monoton is.

Példák.

$a_n = 1$ $\{a_n\} = \{1, 1, 1, \dots\}$ - konstans, monoton növekvő/csökkenő, de nem szigorúan monoton

$b_n = (-1)^n$ $\{b_n\} = \{-1, 1, -1, \dots\}$ - oszcillál, nem monoton növekvő/csökkenő

$c_n = 1/n$ $\{c_n\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ - monoton csökkenő

Monotonitás

Példa. Lássuk be, hogy az $d_n = \frac{2n-1}{n+1}$ sorozat monoton! Csökkenő vagy növekvő a sorozat?

Monotonitás

Példa. Lássuk be, hogy az $d_n = \frac{2n-1}{n+1}$ sorozat monoton! Csökkenő vagy növekvő a sorozat?

$$d_n \stackrel{>}{<} d_{n+1}$$

$$\frac{2n-1}{n+1} \stackrel{>}{<} \frac{2(n+1)-1}{(n+1)+1}$$

$$(2n-1)(n+2) \stackrel{>}{<} (2n+1)(n+1)$$

$$2n^2 + 3n - 2 \stackrel{>}{<} 2n^2 + 3n + 1$$

$$-2 < 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

Tehát $\{d_n\}$ sorozat szigorúan monoton növekedő.

Korlátosság

Az $\{a_n\}$ sorozat **felülről korlátos**, ha elemeinek halmaza felülről korlátos, azaz $\exists K \in \mathbb{R}$, úgy hogy $\forall n \in \mathbb{Z}^+, a_n \leq K$.

Az $\{a_n\}$ sorozat **alulról korlátos**, ha elemeinek halmaza alulról korlátos, azaz $\exists k \in \mathbb{R}$, úgy hogy $\forall n \in \mathbb{Z}^+, a_n \geq k$.

Az $\{a_n\}$ sorozat **korlátos**, ha felülről és alulról is korlátos.

Az $\{a_n\}$ sorozatnak $\text{Sup}(a_n)$ **legkisebb felső korlátja (Supremuma)**, ha felső korlátja a sorozatnak és $\forall K \in \mathbb{R}$ felső korlát esetén $\text{Sup}(a_n) \leq K$.

Az $\{a_n\}$ sorozatnak $\text{Inf}(a_n)$ **legnagyobb alsó korlátja (Infimuma)**, ha alsó korlátja a sorozatnak és $\forall k \in \mathbb{R}$ alsó korlát esetén $\text{Inf}(a_n) \geq k$.

Tétel. Minden felülről (illetve alulról) korlátos valós számhalmaznak létezik legkisebb felső (illetve legnagyobb alsó) korlátja $\mathbb{R}$ -ben. (Nem biz.)

Példa.

- $a_n = 1$ - konstans, korlátos, $\inf(a_n) = \sup(a_n) = 1$
- $b_n = (-1)^n$ - oszcillál, korlátos, $\inf(b_n) = -1$, $\sup(b_n) = 1$
- $c_n = 1/n$ - monoton csökkenő, korlátos, mert minden eleme pozitív $\inf(c_n) = 0$, továbbá $\sup(c_n) = c_1 = 1$
- $d_n = \frac{2n-1}{n+1}$ - monoton növekvő, alulról korlátos, mert $\inf(d_n) = d_1 = \frac{1}{2}$, felső korlát? (< 2).

Konvergenca

Legyen $\{a_n\}$ egy valós számsorozat és $A \in \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy $\{a_n\}$ sorozat **tart** vagy **konvergál** A -hoz, ha az A bármely $\varepsilon > 0$ sugarú környezetén kívül véges sok a_n elem van.

Átfogalmazva $\{a_n\}$ valós számsorozat az $A \in \mathbb{R}$ számhoz tart, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan N_ε küszöbindex, melytől kezdve ha $n > N_\varepsilon$, akkor $|a_n - A| < \varepsilon$.

Ekkor A szám az $\{a_n\}$ sorozat **határértéke**. Jelölés:

$$a_n \rightarrow A, \quad \text{vagy} \quad a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A \quad \text{vagy} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$$

Egy $\{a_n\}$ valós számsorozat **divergens**, ha nem konvergens (nincs határértéke).

Konvergencia - Példák

Példa. Lássuk be, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Példa. Lássuk be, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

A definíció alapján tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz kell egy indexet találnunk, úgy, hogy

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon,$$

mivel $n > 0$, ezért $\frac{1}{n} < \varepsilon$

így $N_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} < n$

azaz, ha $\varepsilon = 0.1$, akkor $N_\varepsilon = 10$, ha $\varepsilon = 0.001$, akkor $N_\varepsilon = 1000$ jó küszöbindex.

Konvergencia – Példák

Korábbi példa. Lássuk be, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n+1} = 2$.

Konvergenca – Példák

Korábbi példa. Lássuk be, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n+1} = 2$.

A definíció alapján tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz kell egy indexet találnunk, úgy, hogy

$$\left| \frac{2n-1}{n+1} - 2 \right| < \varepsilon,$$

$$\left| \frac{2n-1 - (2n+2)}{n+1} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{-3}{n+1} \right| < \varepsilon$$

$$\text{mivel } n > 0, \quad \frac{3}{n+1} < \varepsilon$$

$$\text{így } N_\varepsilon = \frac{3}{\varepsilon} - 1 < n$$

azaz, ha $\varepsilon = 0.1$, akkor $N_\varepsilon = 3 \cdot 10 - 1 = 29$.

Ha $n > N_\varepsilon$: $a_{30} = 59/31 = 1.9032$, $a_{31} = 61/31 = 1.90625$ stb.

Ha $\varepsilon = 0.001$, akkor $N_\varepsilon = 3000 - 1 = 2999$ jó küszöbindex.

A konvergencia definíciójának átfogalmazása

Átfogalmazás: (Sorozatok konvergenciájának **Cauchy-féle definíciója**)

Az $\{a_n\}$ valós számsorozat konvergens, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan N_ε küszöbindex, melytől kezdve ha $n, m > N_\varepsilon$, akkor

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Következik belőle, hogy a határérték, ha létezik, akkor egyértelmű.

Indirekt tegyük fel, hogy A és B is határértéke $\{a_n\}$ -nek.

Keressünk jó N_ε -t az $\varepsilon = \frac{|A - B|}{3}$ -hoz!

Torlódási pont

Az $\{a_n\}$ sorozat **részsorozata** $\{b_k\} \subset \{a_n\}$ sorozat, ha létezik olyan monoton növekvő hozzárendelés $\forall k \in \mathbb{Z}^+$, hogy $k \mapsto n_k$, úgy hogy $b_k = a_{n_k}$.

Az $\{a_n\}$ sorozatnak T szám **torlódási pontja**, ha létezik $\{b_n\} \subset \{a_n\}$ részsorozata, melynek határértéke T .

Példa: $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$ két torlódási pontja van ± 1 .

Torlódási pont

Az $\{a_n\}$ sorozat **részsorozata** $\{b_k\} \subset \{a_n\}$ sorozat, ha létezik olyan monoton növekvő hozzárendelés $\forall k \in \mathbb{Z}^+$, hogy $k \mapsto n_k$, úgy hogy $b_k = a_{n_k}$.

Az $\{a_n\}$ sorozatnak T szám **torlódási pontja**, ha létezik $\{b_n\} \subset \{a_n\}$ részsorozata, melynek határértéke T .

Példa: $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$ két torlódási pontja van ± 1 .

Tétel. Konvergens sorozatnak csak egy torlódási pontja van, a határértéke,
azaz

konvergens sorozatnak minden részsorozata is konvergens, és a részsorozatok határértéke megegyezik az eredeti sorozat határértékével.

Például:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \text{ így } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0 \dots \text{ stb.}$$

Tétel. (Bolzano-Weierstrass) Korlátos sorozatnak mindig van torlódási pontja. (nem biz.)

Monotonitás, korlátosság és konvergencia kapcsolata

Tétel (konvergencia $\rightarrow$ korlátosság).

Konvergens sorozat korlátos.

Példa. $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$, itt $k = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$ és $K = a_1 = 1$.

Tétel (monotonitás+korlátosság $\rightarrow$ konvergencia).

Monoton növekvő felülről korlátos sorozat konvergens. Pl. $\left\{ \frac{2n-1}{n+1} \right\}$

Monoton csökkenő alulról korlátos sorozat konvergens. Pl. $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$

Monoton és korlátos sorozat konvergens.

Monotonitás, korlátosság és konvergencia kapcsolata – Példa

Példa: Vizsgáljuk meg az $a_n = \frac{1-n}{2n}$ sorozat korlátosságát, monotonitását, konvergenciáját.

Monotonitás, korlátosság és konvergencia kapcsolata – Példa

Példa: Vizsgáljuk meg az $a_n = \frac{1-n}{2n}$ sorozat korlátosságát, monotonitását, konvergenciáját.

Megoldás: $\{a_1, a_2, \dots\} = \{0, -\frac{1}{4}, -\frac{2}{6}, -\frac{3}{8} \dots\}$.

Monotonitás, korlátosság és konvergencia kapcsolata – Példa

Példa: Vizsgáljuk meg az $a_n = \frac{1-n}{2n}$ sorozat korlátosságát, monotonitását, konvergenciáját.

Megoldás: $\{a_1, a_2, \dots\} = \{0, -\frac{1}{4}, -\frac{2}{6}, -\frac{3}{8}, \dots\}$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1-(n+1)}{2(n+1)} - \frac{1-n}{2n} = \frac{-n}{2n+2} - \frac{1-n}{2n} = \\ &= \frac{-2n^2 - (2n+2-2n^2-2n)}{2n(2n+2)} = \frac{-2}{2n(2n+2)} < 0, \end{aligned}$$

így $a_{n+1} < a_n$, tehát szigorúan monoton csökkenő a sorozat.

Monotonitás, korlátosság és konvergencia kapcsolata – Példa

Példa: Vizsgáljuk meg az $a_n = \frac{1-n}{2n}$ sorozat korlátosságát, monotonitását, konvergenciáját.

Megoldás: $\{a_1, a_2, \dots\} = \{0, -\frac{1}{4}, -\frac{2}{6}, -\frac{3}{8}, \dots\}$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1-(n+1)}{2(n+1)} - \frac{1-n}{2n} = \frac{-n}{2n+2} - \frac{1-n}{2n} = \\ &= \frac{-2n^2 - (2n+2-2n^2-2n)}{2n(2n+2)} = \frac{-2}{2n(2n+2)} < 0, \end{aligned}$$

így $a_{n+1} < a_n$, tehát szigorúan monoton csökkenő a sorozat.

$\implies$ Felső korlátja $K = a_1 = 0$.

Monotonitás, korlátosság és konvergencia kapcsolata – Példa

Példa: Vizsgáljuk meg az $a_n = \frac{1-n}{2n}$ sorozat korlátosságát, monotonitását, konvergenciáját.

Megoldás: $\{a_1, a_2, \dots\} = \{0, -\frac{1}{4}, -\frac{2}{6}, -\frac{3}{8}, \dots\}$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1-(n+1)}{2(n+1)} - \frac{1-n}{2n} = \frac{-n}{2n+2} - \frac{1-n}{2n} = \\ &= \frac{-2n^2 - (2n+2-2n^2-2n)}{2n(2n+2)} = \frac{-2}{2n(2n+2)} < 0, \end{aligned}$$

így $a_{n+1} < a_n$, tehát szigorúan monoton csökkenő a sorozat.

$\implies$ Felső korlátja $K = a_1 = 0$.

Igaz-e, hogy $a_n > -1$? Igen, mert $n-1 < 2n$, hiszen $-1 < n$.

Monotonitás, korlátosság és konvergencia kapcsolata – Példa

Példa: Vizsgáljuk meg az $a_n = \frac{1-n}{2n}$ sorozat korlátosságát, monotonitását, konvergenciáját.

Megoldás: $\{a_1, a_2, \dots\} = \{0, -\frac{1}{4}, -\frac{2}{6}, -\frac{3}{8}, \dots\}$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1-(n+1)}{2(n+1)} - \frac{1-n}{2n} = \frac{-n}{2n+2} - \frac{1-n}{2n} = \\ &= \frac{-2n^2 - (2n+2-2n^2-2n)}{2n(2n+2)} = \frac{-2}{2n(2n+2)} < 0, \end{aligned}$$

így $a_{n+1} < a_n$, tehát szigorúan monoton csökkenő a sorozat.

$\implies$ Felső korlátja $K = a_1 = 0$.

Igaz-e, hogy $a_n > -1$? Igen, mert $n-1 < 2n$, hiszen $-1 < n$.

$\implies$ Alsó korlátja $k = -1$.

Monotonitás, korlátosság és konvergencia kapcsolata – Példa

Példa: Vizsgáljuk meg az $a_n = \frac{1-n}{2n}$ sorozat korlátosságát, monotonitását, konvergenciáját.

Megoldás: $\{a_1, a_2, \dots\} = \{0, -\frac{1}{4}, -\frac{2}{6}, -\frac{3}{8}, \dots\}$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1-(n+1)}{2(n+1)} - \frac{1-n}{2n} = \frac{-n}{2n+2} - \frac{1-n}{2n} = \\ &= \frac{-2n^2 - (2n+2-2n^2-2n)}{2n(2n+2)} = \frac{-2}{2n(2n+2)} < 0, \end{aligned}$$

így $a_{n+1} < a_n$, tehát szigorúan monoton csökkenő a sorozat.

$\implies$ Felső korlátja $K = a_1 = 0$.

Igaz-e, hogy $a_n > -1$? Igen, mert $n-1 < 2n$, hiszen $-1 < n$.

$\implies$ Alsó korlátja $k = -1$.

Konvergens a sorozat, határértéke

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Monotonitás, korlátosság és konvergencia kapcsolata – Példa

Példa: Vizsgáljuk meg az $a_n = \frac{1-n}{2n}$ sorozat korlátosságát, monotonitását, konvergenciáját.

Megoldás: $\{a_1, a_2, \dots\} = \{0, -\frac{1}{4}, -\frac{2}{6}, -\frac{3}{8}, \dots\}$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1-(n+1)}{2(n+1)} - \frac{1-n}{2n} = \frac{-n}{2n+2} - \frac{1-n}{2n} = \\ &= \frac{-2n^2 - (2n+2-2n^2-2n)}{2n(2n+2)} = \frac{-2}{2n(2n+2)} < 0, \end{aligned}$$

így $a_{n+1} < a_n$, tehát szigorúan monoton csökkenő a sorozat.

$\implies$ Felső korlátja $K = a_1 = 0$.

Igaz-e, hogy $a_n > -1$? Igen, mert $n-1 < 2n$, hiszen $-1 < n$.

$\implies$ Alsó korlátja $k = -1$.

Konvergens a sorozat, határértéke

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

$\implies$ Legnagyobb alsó korlátja $k = -\frac{1}{2}$.

Műveletek konvergens sorozatokkal

Tétel. Korlátos sorozatokból tagonkénti összegéssel, kivonással vagy szorzással kapott sorozatok is korlátosak.

Tétel. Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ és $A, B \in \mathbb{R}$, akkor

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm b_n = A \pm B$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = A \cdot B$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda a_n = \lambda A$, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^k = A^k$, $k > 1$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{A}$, feltéve, hogy $a_n > 0$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, feltéve, hogy $b_n \neq 0$ és $B \neq 0$.

Műveletek konvergens sorozatokkal

Példák.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 1}{n + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n + 1) - 3}{n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \frac{3}{n + 1} = \\ &= 2 - 3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n + 1} = 2 - 3 \cdot 0 = 2.\end{aligned}$$

Műveletek konvergens sorozatokkal

Példák.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)-3}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \frac{3}{n+1} = \\ &= 2 - 3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 2 - 3 \cdot 0 = 2.\end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - 1}{2} = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Műveletek konvergens sorozatokkal

Példák.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)-3}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \frac{3}{n+1} = \\ &= 2 - 3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 2 - 3 \cdot 0 = 2.\end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - 1}{2} = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right)^2 = 2 \cdot 0 - 0^2 = 0.$$

Műveletek konvergens sorozatokkal

Példák.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)-3}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \frac{3}{n+1} = \\ &= 2 - 3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 2 - 3 \cdot 0 = 2.\end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - 1}{2} = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right)^2 = 2 \cdot 0 - 0^2 = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2n^4 + 3n^2 + 2}{7n^4 + 4n^3 + 6}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2 + \frac{3}{n^2} + \frac{2}{n^4}}{7 + \frac{4}{n} + \frac{6}{n^4}}} = \sqrt{\frac{2+0+0}{7+0+0}} = \sqrt{\frac{2}{7}}.$$

Összefoglaló: Sorozatok

- Mit nevezünk valós számsorozatnak?
- Mikor mondjuk, hogy egy valós számsorozat konvergál egy A számhoz?
- Mondja ki a sorozatok korlátosságára, monotonitására és konvergenciájára vonatkozó összefüggéseket!