

Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2025. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia

belus@math.bme.hu

geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

7. előadás:
Numerikus sorozatok:
Rendőr-elv,
Véges, végtelen határérték fogalma,
Nevezetes sorozatok

Rendőr-elv

Tétel. (Rendőr/szendvics-elv) Ha $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ és $\{c_n\}$ sorozatok esetén,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = H$ és egy adott N küszöbindextől minden $n > N$ -re

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

teljesül, akkor a $\{b_n\}$ sorozat konvergens, és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = H$.

Rendőr-elv

Tétel. (Rendőr/szendvics-elv) Ha $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ és $\{c_n\}$ sorozatok esetén,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = H$ és egy adott N küszöbindextől minden $n > N$ -re

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

teljesül, akkor a $\{b_n\}$ sorozat konvergens, és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = H$.

Példa. $b_n = \frac{\sin(n)}{n}$.

Rendőr-elv

Tétel. (Rendőr/szendvics-elv) Ha $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ és $\{c_n\}$ sorozatok esetén,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = H$ és egy adott N küszöbindextől minden $n > N$ -re

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

teljesül, akkor a $\{b_n\}$ sorozat konvergens, és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = H$.

Példa. $b_n = \frac{\sin(n)}{n}$.

$$\{b_n\} = \left\{ \sin(1) \approx 0,8415; \frac{\sin(2)}{2} \approx 0,4546; \frac{\sin(3)}{3} \approx 0,047; \frac{\sin(4)}{4} \approx -0,1892; \dots \right\}$$

Tétel. (Rendőr/szendvics-elv) Ha $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ és $\{c_n\}$ sorozatok esetén,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = H$ és egy adott N küszöbindextől minden $n > N$ -re

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

teljesül, akkor a $\{b_n\}$ sorozat konvergens, és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = H$.

Példa. $b_n = \frac{\sin(n)}{n}$.

$$\{b_n\} = \left\{ \sin(1) \approx 0,8415; \frac{\sin(2)}{2} \approx 0,4546; \frac{\sin(3)}{3} \approx 0,047; \frac{\sin(4)}{4} \approx -0,1892; \dots \right\}$$

Használjuk ki a $\sin(x)$ korlátosságát: $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, ezért

$$a_n = \frac{-1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n} = c_n.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$$

Tétel. (Rendőr/szendvics-elv) Ha $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ és $\{c_n\}$ sorozatok esetén,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = H$ és egy adott N küszöbindextől minden $n > N$ -re

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

teljesül, akkor a $\{b_n\}$ sorozat konvergens, és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = H$.

Példa. $b_n = \frac{\sin(n)}{n}$.

$$\{b_n\} = \left\{ \sin(1) \approx 0,8415; \frac{\sin(2)}{2} \approx 0,4546; \frac{\sin(3)}{3} \approx 0,047; \frac{\sin(4)}{4} \approx -0,1892; \dots \right\}$$

Használjuk ki a $\sin(x)$ korlátosságát: $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, ezért

$$a_n = \frac{-1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n} = c_n.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$$

Ebből a rendőr-elv alapján következik, hogy: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$.

Végtelenbe tartás

Definíció. Egy $\{a_n\}$ valós számsorozat **tart a ∞ -be**, ha bármely $K > 0$ esetén van olyan N_K küszöbindex, hogy ha $n > N_K$, akkor $a_n > K$.

Végtelenbe tartás

Definíció. Egy $\{a_n\}$ valós számsorozat **tart a ∞ -be**, ha bármely $K > 0$ esetén van olyan N_K küszöbindex, hogy ha $n > N_K$, akkor $a_n > K$.

Definíció. Egy $\{a_n\}$ valós számsorozat **tart a $-\infty$ -be**, ha bármely $k < 0$ esetén van olyan N_k küszöbindex, hogy ha $n > N_k$, akkor $a_n < k$.

Végtelenbe tartás

Definíció. Egy $\{a_n\}$ valós számsorozat **tart a ∞ -be**, ha bármely $K > 0$ esetén van olyan N_K küszöbindex, hogy ha $n > N_K$, akkor $a_n > K$.

Definíció. Egy $\{a_n\}$ valós számsorozat **tart a $-\infty$ -be**, ha bármely $k < 0$ esetén van olyan N_k küszöbindex, hogy ha $n > N_k$, akkor $a_n < k$.

A $\pm\infty$ -be tartó sorozatok is divergensnek.

Végtelenbe tartás

Definíció. Egy $\{a_n\}$ valós számsorozat **tart a ∞ -be**, ha bármely $K > 0$ esetén van olyan N_K küszöbindex, hogy ha $n > N_K$, akkor $a_n > K$.

Definíció. Egy $\{a_n\}$ valós számsorozat **tart a $-\infty$ -be**, ha bármely $k < 0$ esetén van olyan N_k küszöbindex, hogy ha $n > N_k$, akkor $a_n < k$.

A $\pm\infty$ -be tartó sorozatok is divergensnek.

Példák.

- | | | |
|---|---|---|
| $\{a_n\} = \{n\} = \{1, 2, 3, \dots\}$ | - | monoton nő, de nincsen felső korlátja, ∞ -be tart. |
| $\{b_n\} = \{-n^2\} = \{-1, -4, -9, \dots\}$ | - | csökken, alulról nem korlátos, $-\infty$ -be tart. |
| $\{c_n\} = \{(-1)^n \cdot n\} = \{-1, 2, -3, \dots\}$ | - | oszcillál, nem korlátos, egyik "fele" a ∞ -be, másik a $-\infty$ -be tart. |

Műveletek ∞ -hez tartó sorozatokkal

Tétel. Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, akkor

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm b_n = "A \pm \infty" = \pm \infty,$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = "A \cdot \infty" \begin{cases} \infty, & \text{ha } A > 0, \\ -\infty, & \text{ha } A < 0, \\ ?, & \text{ha } A = 0, \end{cases}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{\infty} = 0$, feltéve, hogy $b_n \neq 0$

Műveletek ∞ -hez tartó sorozatokkal

Tétel. Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, akkor

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm b_n = "A \pm \infty" = \pm \infty,$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = "A \cdot \infty" \begin{cases} \infty, & \text{ha } A > 0, \\ -\infty, & \text{ha } A < 0, \\ ?, & \text{ha } A = 0, \end{cases}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{"A"}{\infty} = 0$, feltéve, hogy $b_n \neq 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n + c_n = "\infty + \infty" = \infty$ DE $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n - c_n = "\infty - \infty" = ?$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \cdot c_n = "\infty \cdot \infty" = \infty$ DE $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{c_n} = \frac{"\infty"}{\infty} = ?$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)^k = "\infty^k" = \infty \quad (k > 0)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)^{c_n} = "\infty^\infty" = \infty$

Műveletek ∞ -hez tartó sorozatokkal

Tétel. Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, akkor

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm b_n = "A \pm \infty" = \pm \infty,$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = "A \cdot \infty" \begin{cases} \infty, & \text{ha } A > 0, \\ -\infty, & \text{ha } A < 0, \\ ?, & \text{ha } A = 0, \end{cases}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{\infty} = 0$, feltéve, hogy $b_n \neq 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n + c_n = "\infty + \infty" = \infty$ DE $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n - c_n = "\infty - \infty" = ?$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \cdot c_n = "\infty \cdot \infty" = \infty$ DE $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{c_n} = \frac{\infty}{\infty} = ?$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)^k = "\infty^k" = \infty \quad (k > 0)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)^{c_n} = "\infty^\infty" = \infty$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = "A^\infty" = \begin{cases} \infty, & \text{ha } A > 1, \\ 0, & \text{ha } 0 < A < 1, \\ ?, & \text{ha } A \leq 0 \text{ vagy } A = 1, \end{cases}$

Műveletek ∞ -hez tartó sorozatokkal

Tétel. Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, akkor

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm b_n = "A \pm \infty" = \pm \infty,$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = "A \cdot \infty" \begin{cases} \infty, & \text{ha } A > 0, \\ -\infty, & \text{ha } A < 0, \\ ?, & \text{ha } A = 0, \end{cases} \quad (0 \cdot \infty)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{\infty} = 0$, feltéve, hogy $b_n \neq 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n + c_n = "\infty + \infty" = \infty$ DE $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n - c_n = "\infty - \infty" = ? \quad (\infty - \infty)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \cdot c_n = "\infty \cdot \infty" = \infty$ DE $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{c_n} = \frac{\infty}{\infty} = ? \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)^k = "\infty^k" = \infty \quad (k > 0)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)^{c_n} = "\infty^\infty" = \infty$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = "A^\infty" = \begin{cases} \infty, & \text{ha } A > 1, \\ 0, & \text{ha } 0 < A < 1, \\ ?, & \text{ha } A \leq 0 \text{ vagy } A = 1, \end{cases} \quad (1^\infty)$

Műveletek ∞ -hez tartó sorozatokkal

Kritikus határértékek: " $0 \cdot \infty$ ", " $\infty - \infty$ ", " $\frac{\infty}{\infty}$ ", " $\frac{0}{0}$ ", " 1^∞ ", " 0^0 " ...

Műveletek ∞ -hez tartó sorozatokkal

Kritikus határértékek: " $0 \cdot \infty$ ", " $\infty - \infty$ ", " $\frac{\infty}{\infty}$ ", " $\frac{0}{0}$ ", " 1^∞ ", " 0^0 " ...

Példa.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n} = \frac{\infty}{\infty} = \infty \quad \text{DE} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = \frac{\infty}{\infty} = 0.$$

Műveletek ∞ -hez tartó sorozatokkal

Kritikus határértékek: " $0 \cdot \infty$ ", " $\infty - \infty$ ", " $\frac{\infty}{\infty}$ ", " $\frac{0}{0}$ ", " 1^∞ ", " 0^0 " ...

Példa.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n} = \frac{\infty}{\infty} = \infty \quad \text{DE} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = \frac{\infty}{\infty} = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2n - n = \infty - \infty = \infty \quad \text{DE} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n - n^2 = \infty - \infty = -\infty.$$

Műveletek ∞ -hez tartó sorozatokkal

Kritikus határértékek: " $0 \cdot \infty$ ", " $\infty - \infty$ ", " $\frac{\infty}{\infty}$ ", " $\frac{0}{0}$ ", " 1^∞ ", " 0^0 " ...

Példa.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n} = \frac{\infty}{\infty} = \infty \quad \text{DE} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = \frac{\infty}{\infty} = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2n - n = \infty - \infty = \infty \quad \text{DE} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n - n^2 = \infty - \infty = -\infty.$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \infty - \infty = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\infty + \infty} = 0. \end{aligned}$$

Nevezetes sorozatok – Mértani sorozat

$$\{a_n\} = \{q^n\} = \{1, q, q^2, q^3, \dots\}, \text{ ahol } n \in \mathbb{N}:$$

számok egész hatványainak sorozata.

Nevezetes sorozatok – Mértani sorozat

$\{a_n\} = \{q^n\} = \{1, q, q^2, q^3, \dots\}$, ahol $n \in \mathbb{N}$:

számok egész hatványainak sorozata.

Legyen $q = 2$, ekkor $\{q^n\} = \{1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$.

- Ha $q > 1$, monoton növekvő, nem korlátos, ∞ -hez tartó a sorozat.

Nevezetes sorozatok – Mértani sorozat

$\{a_n\} = \{q^n\} = \{1, q, q^2, q^3, \dots\}$, ahol $n \in \mathbb{N}$:

számok egész hatványainak sorozata.

Legyen $q = 2$, ekkor $\{q^n\} = \{1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$.

- Ha $q > 1$, monoton növekvő, nem korlátos, ∞ -hez tartó a sorozat.

Legyen $q = 1$, ekkor $\{q^n\} = \{1, 1, 1, 1, \dots\}$.

- Ha $q = 1$, konstans sorozat, 1 -hez tart.

Nevezetes sorozatok – Mértani sorozat

$\{a_n\} = \{q^n\} = \{1, q, q^2, q^3, \dots\}$, ahol $n \in \mathbb{N}$:

számok egész hatványainak sorozata.

Legyen $q = 2$, ekkor $\{q^n\} = \{1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$.

- Ha $q > 1$, monoton növekvő, nem korlátos, ∞ -hez tartó a sorozat.

Legyen $q = 1$, ekkor $\{q^n\} = \{1, 1, 1, 1, \dots\}$.

- Ha $q = 1$, konstans sorozat, 1 -hez tart.

Legyen $q = \frac{1}{2}$ vagy $-\frac{1}{2}$, ekkor $\{q^n\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\}$ vagy $\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots\}$.

- Ha $-1 < q < 1$, abszolútértékben monoton csökken, tehát 0 -hoz tart.

Nevezetes sorozatok – Mértani sorozat

$\{a_n\} = \{q^n\} = \{1, q, q^2, q^3, \dots\}$, ahol $n \in \mathbb{N}$:

számok egész hatványainak sorozata.

Legyen $q = 2$, ekkor $\{q^n\} = \{1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$.

- Ha $q > 1$, monoton növekvő, nem korlátos, **∞ -hez** tartó a sorozat.

Legyen $q = 1$, ekkor $\{q^n\} = \{1, 1, 1, 1, \dots\}$.

- Ha $q = 1$, konstans sorozat, **1-hez** tart.

Legyen $q = \frac{1}{2}$ vagy $-\frac{1}{2}$, ekkor $\{q^n\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\}$ vagy $\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots\}$.

- Ha $-1 < q < 1$, abszolútértékben monoton csökken, tehát **0-hoz** tart.

Legyen $q = -2$, ekkor $\{1, -2, 4, -8, 16, \dots\}$.

- Ha $q < -1$, oszcillál, nem korlátos, **divergens** a sorozat.

$$\text{Tehát } \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} \infty, & \text{ha } q > 1, \\ 1, & \text{ha } q = 1, \\ 0, & \text{ha } |q| < 1, \\ \text{divergens,} & \text{ha } q \leq -1. \end{cases}$$

Nevezetes sorozatok – Egész gyökök sorozata

$$\{a_n\} = \{\sqrt[n]{q}\} = \{q, \sqrt{q}, \sqrt[3]{q}, \dots\}, \text{ ha } q > 0:$$

adott pozitív szám egész gyökeinek sorozata.

Nevezetes sorozatok – Egész gyökök sorozata

$$\{a_n\} = \{\sqrt[n]{q}\} = \{q, \sqrt{q}, \sqrt[3]{q}, \dots\}, \text{ ha } q > 0:$$

adott pozitív szám egész gyökeinek sorozata.

- **1-hez** tart, gondoljuk meg:

Ha $q > 1$, akkor $\sqrt[n]{q} > 1$ és monoton csökkenő sorozatot alkot.
Legnagyobb alsó korlátja az 1 lesz (nem biz.)

Ha $q < 1$, akkor $\sqrt[n]{q} < 1$ és monoton növekvő sorozatot alkot.
Legkisebb felső korlátja az 1 lesz (nem biz.)

Nevezetes sorozatok – Egész gyökök sorozata

$$\{a_n\} = \{\sqrt[n]{q}\} = \{q, \sqrt{q}, \sqrt[3]{q}, \dots\}, \text{ ha } q > 0:$$

adott pozitív szám egész gyökeinek sorozata.

- **1-hez** tart, gondoljuk meg:

Ha $q > 1$, akkor $\sqrt[n]{q} > 1$ és monoton csökkenő sorozatot alkot.
Legnagyobb alsó korlátja az 1 lesz (nem biz.)

Ha $q < 1$, akkor $\sqrt[n]{q} < 1$ és monoton növekvő sorozatot alkot.
Legkisebb felső korlátja az 1 lesz (nem biz.)

$$\{b_n\} = \{\sqrt[n]{n}\} = \{1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \dots\}:$$

egész számok egész gyökeinek sorozata.

Nevezetes sorozatok – Egész gyökök sorozata

$$\{a_n\} = \{\sqrt[n]{q}\} = \{q, \sqrt{q}, \sqrt[3]{q}, \dots\}, \text{ ha } q > 0:$$

adott pozitív szám egész gyökeinek sorozata.

- **1-hez** tart, gondoljuk meg:

Ha $q > 1$, akkor $\sqrt[n]{q} > 1$ és monoton csökkenő sorozatot alkot. Legnagyobb alsó korlátja az 1 lesz (nem biz.)

Ha $q < 1$, akkor $\sqrt[n]{q} < 1$ és monoton növekvő sorozatot alkot. Legkisebb felső korlátja az 1 lesz (nem biz.)

$$\{b_n\} = \{\sqrt[n]{n}\} = \{1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \dots\}:$$

egész számok egész gyökeinek sorozata.

- **1-hez** tart, gondoljuk meg (nem biz.):

A sorozat minden eleme $\sqrt[n]{n} \geq 1$, sőt legnagyobb alsó korlátja is az 1 (nem biz.), és a harmadik elemtől monoton csökken (nem biz.):

$$b_2 = \sqrt{2} \approx 1,4142 < b_3 = \sqrt[3]{3} \approx 1,4422 \quad \text{DE}$$

$$b_3 = \sqrt[3]{3} \approx 1,4422 > b_4 = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} \approx 1,4142 > b_5 = \sqrt[5]{5} \approx 1,3797 \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2n-1} = ?$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2n-1} = ?$$

Rendőr-elv segítségével:

$$\begin{array}{ccc} \sqrt[n]{n} & \underset{n>1}{<} & \sqrt[n]{2n-1} < \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 & & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \cdot 1 = 1 \end{array}$$

Tehát $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2n-1} = 1$.

Nevezetes sorozatok – Az "e" szám

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ - sorozat } e\text{-hez } (\approx 2,718..) \text{ tart.}$$

Az $a_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2 < e$ és monoton növekvő a sorozat. Továbbá a_n felülről korlátos. Például belátható, hogy egyik felső korlátja a 3.

Nem adunk teljes indoklást!

Nevezetes sorozatok – Az "e" szám

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ - sorozat } e\text{-hez } (\approx 2,718..) \text{ tart.}$$

Az $a_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2 < e$ és monoton növekvő a sorozat. Továbbá a_n felülről korlátos. Például belátható, hogy egyik felső korlátja a 3.

Nem adunk teljes indoklást!

$$b_n = \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n \text{ - sorozat } e^k\text{-hoz tart.}$$

Nevezetes sorozatok – Példa

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+5}{n-1} \right)^{2n+2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{6}{n-1} \right)^{n-1} \right)^{\frac{2n+2}{n-1}} = \\ &= \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6}{m} \right)^m \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{n-1}} = (e^6)^2 = e^{12}.\end{aligned}$$

Nevezetes sorozatok – Példa

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+5}{n-1} \right)^{2n+2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{6}{n-1} \right)^{n-1} \right)^{\frac{2n+2}{n-1}} = \\ &= \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6}{m} \right)^m \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{n-1}} = (e^6)^2 = e^{12}.\end{aligned}$$

vagy

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+5}{n-1} \right)^{2n+2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{n+5}{n} \right)^{2n+2}}{\left(\frac{n-1}{n} \right)^{2n+2}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\left(1 + \frac{5}{n} \right)^n \right)^2 \cdot \left(1 + \frac{5}{n} \right)^2}{\left(\left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n} \right)^2} = \frac{(e^5)^2 \cdot 1}{(e^{-1})^2 \cdot 1} = e^{10 - (-2)} = e^{12}.\end{aligned}$$

Végtelenbe tartó sorozatok "erő" sorrendje

$$n \ll \sum_{k>1} n^k$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^k} = \lim_{k>1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{k-1}} = 0$$

Végtelenbe tartó sorozatok "erő" sorrendje

$$n \ll \lim_{k>1} n^k \ll \lim_{a>1} a^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^k} = \lim_{k>1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{k-1}} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, \quad a>1, k>1$$

Végtelenbe tartó sorozatok "erő" sorrendje

$$n \ll \underset{k>1}{n^k} \ll \underset{a>1}{a^n} \ll n!$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^k} \underset{k>1}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{k-1}} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} \underset{a>1, k>1}{=} 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} \underset{a>1}{=} 0,$$

Végtelenbe tartó sorozatok "erő" sorrendje

$$n \ll n_{k>1}^k \ll a_{a>1}^n \ll n! \ll n^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^k} = \lim_{k>1} \frac{1}{n^{k-1}} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Végtelenbe tartó sorozatok "erő" sorrendje

$$\sqrt[k]{n} \ll n \ll n^k \ll a^n \ll n! \ll n^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^k} = \lim_{k > 1} \frac{1}{n^{k-1}} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[k]{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{k-1}{k}}} = 0,$$

Végtelenbe tartó sorozatok "erő" sorrendje

$$\log_a(n) \ll \sqrt[k]{n} \ll n \ll n^k \ll a^n \ll n! \ll n^n$$

$a > 1 \qquad k > 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^k} = \lim_{k > 1} \frac{1}{n^{k-1}} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

$a > 1, k > 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[k]{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{k-1}{k}}} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a(n)}{\sqrt[k]{n}} = 0.$$

$k > 1 \qquad a > 1, k > 1$

Összefoglaló: Sorozatok

- Definiálja mit értünk az alatt, hogy egy sorozat a végtelenbe tart!
- Mondja ki a sorozatokra vonatkozó Rendőr-elvet!