

Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2025. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia

belus@math.bme.hu

geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

8. előadás:
Függvényhatárértékek, Az átviteli-elv,
Végtelenbe tartás,
Nevezetes függvényhatárértékek

Határérték definíciója

Definíció. Legyen f valós függvény értelmezve az x_0 pont egy környezetében, ekkor x_0 -ban f **határértéke** A , ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, melyre ha $|x - x_0| < \delta$, akkor $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Jelölés:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

vagy

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A.$$

Bár f az x_0 környezetében definiált, azt nem követeljük meg, hogy a függvény x_0 -ban is értelmezve legyen.

Példa

Az $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2}$ függvény értelmezési tartománya: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Mennyi a határértéke $x_0 = 2$ -ben?

Példa

Az $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2}$ függvény értelmezési tartománya: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Mennyi a határértéke $x_0 = 2$ -ben?

Mivel

$$f(x) = \frac{(2x + 1)(x - 2)}{x - 2},$$

így ha $x \neq 2$, akkor $f(x) = 2x + 1$, és $2x + 1 \approx 5$, ha x közelít 2-höz.

Definiálhatnánk így is a függvényt:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{ha } x \neq 2 \\ \text{nincs értelmezve,} & \text{ha } x = 2 \end{cases}$$

Sejtjük, hogy $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$. A definíció alapján

$$\left| \frac{(2x + 1)(x - 2)}{x - 2} - 5 \right| < \varepsilon \quad x \neq 2$$

$$|2x - 4| < \varepsilon$$

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{2} = \delta \text{ jó lesz!}$$

Példa – Az egészrész függvény

Mi a helyzet az $f(x) = [x] = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x < k + 1\}$ egészrész függvénnyel $x_0 = 2$ -ben?

Példa – Az egészrész függvény

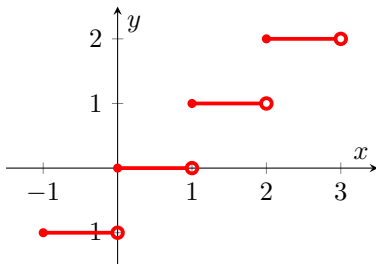
Mi a helyzet az $f(x) = [x] = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x < k+1\}$ egészrész függvénnyel $x_0 = 2$ -ben?

Ha $|x - 2| < \delta < 1$ és $x \neq 2$, akkor

$$\begin{aligned} f(x) &= 2, \text{ ha } x > 2, \text{ és} \\ f(x) &= 1, \text{ ha } x < 2. \end{aligned}$$

Tehát $|f(x) - A| < \varepsilon < \frac{1}{2}$ nem teljesül sem $A = 1$ -gyel, sem $A = 2$ -vel.

Így a határérték nem létezik.



Jobb és bal oldali határérték

Érdemes külön tekinteni a két oldalt:

Definíció. Legyen f valós függvény értelmezve az x_0 pont egy jobb oldali környezetében, ekkor az f valós függvénynek az x_0 pontban a **jobb oldali határértéke** $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, melyre ha $0 < x - x_0 < \delta$, akkor $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Jelölés: $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = A$.

Definíció. Legyen f valós függvény értelmezve az x_0 pont egy baloldali oldali környezetében, ekkor az f valós függvénynek az x_0 pontban a **bal oldali határértéke** $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, melyre ha $0 < x_0 - x < \delta$, akkor $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Jelölés: $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = A$.

Előző példában: $\lim_{x \rightarrow 2-} [x] = 1$, és $\lim_{x \rightarrow 2+} [x] = 2$.

Határérték egyértelmősége

Tétel: Ha az f függvénynek x_0 pontban léteznek a jobb és bal oldali határértéke, és ezek egyenlőek, akkor a függvénynek létezik az x_0 pontban határértéke, és ez megegyezik a jobb és bal oldali határértékkel.

$$\lim_{x \rightarrow x_0 -} f(x) = A = \lim_{x \rightarrow x_0 +} f(x) \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

Tétel: Ha létezik a határérték, akkor egyértelmű:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ és } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = B \text{ esetén } A = B.$$

Indirekt bizonyítás: $\varepsilon = \frac{|A - B|}{3}$ -hoz nincs jó δ ,

hasonlóan, mint a sorozatoknál ε -hoz nincsen N_ε .

Egy függvénynek x_0 -ban A a határértéke akkor és csak akkor, ha **bármely** $\{x_n\}$ sorozatra, mely $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, $x_n \in D_f$, $(x_n \neq x_0)$, igaz lesz, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

Ezek alapján belátható, hogy csak úgy, mint a sorozatoknál, ha

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ és $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ és $A, B \in \mathbb{R}$, akkor

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm g(x) = A \pm B$,
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$,
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ feltéve, hogy $g(x) \neq 0$ és $B \neq 0$.

Féloldali határértékekre hasonlóan.

Végtelen határérték

Mi a helyzet az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvénnyel a 0 pont jobb oldalán? ($0 \notin D_f$)

Minél közelebb vagyunk a 0-hoz, annál nagyobb a függvényérték, tehát a függvény a végtelenhez tart.

Végtelen határérték

Mi a helyzet az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvénnyel a 0 pont jobb oldalán? ($0 \notin D_f$)

Minél közelebb vagyunk a 0-hoz, annál nagyobb a függvényérték, tehát a függvény a végtelenhez tart.

Definíció. Az $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvénynek az x_0 **pontban a határértéke jobbról** ∞ , ha minden $K \in \mathbb{R}$ -hez van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < x - x_0 < \delta$ esetén $x \in D_f$, és $f(x) > K$.

Jelölés: $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \infty$.

Végtelen határérték – variációk

Definíció: Az $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény az x_0 **pontban (jobbról/balról)** a **végtelenbe tart**, ha minden $K \in \mathbb{R}$ -hez van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$ (és $x > x_0$ / és $x < x_0$), akkor $x \in D_f$ és $f(x) > K$.

$$\text{Jelölés: } \lim_{x \rightarrow x_0(\pm)} f(x) = \infty.$$

Definíció: Az $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény az x_0 **pontban (jobbról/balról)** a **mínusz végtelenbe tart**, ha minden $K \in \mathbb{R}$ -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$ (és $x > x_0$ / és $x < x_0$), akkor $x \in D_f$ és $f(x) < K$.

$$\text{Jelölés: } \lim_{x \rightarrow x_0(\pm)} f(x) = -\infty.$$

$$\text{Példában } \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{DE} \quad \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x} = -\infty. \quad \text{Továbbá } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = \infty.$$

Határérték a végtelenben

Nem csak a határérték lehet végtelen, hanem a végtelenben is vizsgálhatjuk a függvény viselkedését.

Például az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvénnyel a ∞ -ben 0-hoz tart.

Definíció. Az $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvénynek a ∞ -ben a **határértéke** A , ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $L_\varepsilon \in \mathbb{R}$, hogy ha $L_\varepsilon < x$, akkor $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Jelölés: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

Végtelenben végtelen

Lehetséges, hogy a végtelenben a függvény a $(\pm)$ végtelenhez tart:

Definíció. Az $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény a ∞ -ben ∞ -hez ($-\infty$ -hez) tart, ha minden $K \in \mathbb{R}$ -hez van olyan $L_K \in \mathbb{R}$, hogy ha $L_K < x$, akkor $x \in D_f$ és $f(x) > K$ ($f(x) < K$).

$$\text{Jelölés: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \text{ } (-\infty)$$

Hasonlóan a $-\infty$ -ben tarthat f egy A számhoz vagy $\pm\infty$ -hez:

Definíció. Az $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvénynek a $-\infty$ -ben **határértéke** A , ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $L_\varepsilon \in \mathbb{R}$, hogy ha $L_\varepsilon > x$, akkor $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$\text{Jelölés: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$$

Definíció. Az $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény a $-\infty$ -ben ∞ -hez ($-\infty$ -hez) tart, ha minden $K \in \mathbb{R}$ -hez van olyan $L_K \in \mathbb{R}$, hogy ha $L_K > x$, akkor $x \in D_f$ és $f(x) > K$ ($f(x) < K$).

$$\text{Jelölés: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm\infty$$

Összefoglalás

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek

az x_0 pontban
az x_0 pontban a jobb oldali
az x_0 pontban a bal oldali
a $+\infty$ -ben a
a $-\infty$ -ben a

határértéke $A \in \mathbb{R}$,
 $+\infty$, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz
 $-\infty$, $K \in \mathbb{R}$ -hez van olyan $\delta > 0$
 $L_\varepsilon \in \mathbb{R}$, hogy
 $L_K \in \mathbb{R}$

$|x - x_0| < \delta$
 $0 < x - x_0 < \delta$
ha $0 < x_0 - x < \delta$, akkor $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.
 $L_\varepsilon < |x|$ $f(x) > K$.
 $L_K < |x|$ $f(x) < K$.

Nevezetes határértékek

Polinomfüggvények: $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $D_f = \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a_n x^n + \dots + a_0 = \begin{cases} \infty & a_n > 0, \\ -\infty & a_n < 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n + \dots + a_0 = \begin{cases} \infty & a_n > 0, n \text{ páros, vagy } a_n < 0, n \text{ páratlan} \\ -\infty & a_n < 0, n \text{ páros, vagy } a_n > 0, n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Példa:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -x^2 + 4x + 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} (-x^2) \left(1 - \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = -\infty \cdot (1 - 0 - 0) = -\infty$$

Nevezetes határértékek

Polinomfüggvények: $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $D_f = \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a_n x^n + \dots + a_0 = \begin{cases} \infty & a_n > 0, \\ -\infty & a_n < 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n + \dots + a_0 = \begin{cases} \infty & a_n > 0, n \text{ páros, vagy } a_n < 0, n \text{ páratlan} \\ -\infty & a_n < 0, n \text{ páros, vagy } a_n > 0, n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Példa:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -x^2 + 4x + 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} (-x^2) \left(1 - \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = -\infty \cdot (1 - 0 - 0) = -\infty$$

Racionális tört függvények: $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, ahol p, q polinomok,

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) = 0\}.$$

Példa:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x^2-1} = \frac{2+3}{2^2-1} = \frac{5}{3}, \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x^2-1} = \frac{-3+3}{(-3)^2-1} = \frac{0}{8} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+3/x}{x-1/x} = \frac{1+0}{\infty-0} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Példa - Féloldali határérték

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x+3}{x^2-1} = ?$$

legyen $x = 1 + h$, ahol $h > 0$, ha $x \rightarrow 1+$ akkor $h \rightarrow 0+$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h+4}{h^2+2h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h+4}{h(h+2)} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{h} \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h+4}{h+2} = \infty \cdot 2 = \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x+3}{x^2-1} = ?$$

legyen $x = 1 - h$, ahol $h > 0$, ha $x \rightarrow 1-$ akkor $h \rightarrow 0+$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{4-h}{h^2-2h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{4-h}{h(h-2)} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{h} \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{4-h}{h-2} = \infty \cdot (-2) = -\infty.$$

Nevezetes határértékek

Gyökfüggvény: $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $x \geq 0$ esetén és $n \in \mathbb{Z}^+$. Monoton növekvő, nem korlátos felülről.

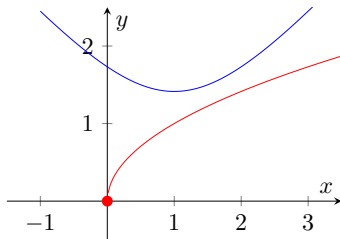
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[n]{x} = 0.$$

Példa:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - 2x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{(x-1)^2 + 2} > \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{(x-1)^2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 3} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^\pm} \sqrt{x^2 - 2x + 3} = \sqrt{11}$$



Nevezetes határértékek

Exponenciális függvény: $f(x) = a^x$, $a > 0$, $D_f = \mathbb{R}$.

$$\text{ha } a > 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0.$$

$$\text{ha } a < 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty.$$

Példa: $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^{-x^2+4x+1} = "2^{-\infty}" = 0$

Logaritmus függvény: $f(x) = \log_a(x)$, $D_f = \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

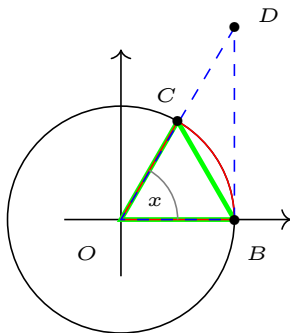
$$\text{ha } a > 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = -\infty.$$

$$\text{ha } a < 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = \infty.$$

Példa: $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_2(x^2 - 2x + 3) = " \log_2(\infty) " = \infty$

Nevezetes határértékek – $\frac{\sin(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$



$$T_{\triangle OCB} = \frac{\sin(x) \cdot 1}{2} < T_{\triangle BOC} = \frac{x}{2\pi} \cdot \pi < T_{\triangle OBD} = \frac{1 \cdot \tan(x)}{2}$$

$$\sin(x) < x < \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)}$$

Rendőr-elv



1



1



1

Nevezetes határértékek – Az "e" szám

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{a függvény határértéke a végtelenben } e.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k.$$

Példa.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x-1}\right)^{2x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{6}{x-1}\right)^{x-1}\right)^{\frac{2x+2}{x-1}} = (e^6)^2 = e^{12}.$$