

Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2025. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia

belus@math.bme.hu

geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

9. előadás:
Folytonosság, szakadási pontok
Szakadási helyek osztályozása,
Korlátos és zárt intervallumon folytonos
függvények tulajdonságai,
Hiperbolikus függvények és inverzeik

Pontbeli folytonosság

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény **folytonos** az $x_0 \in D_f$ pontban, ha a függvény határértéke és a függvény értéke megegyezik x_0 -ban:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Ekvivalens definíció:

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény folytonos az $x_0 \in D_f$ pontban, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $\delta > 0$, hogy $|x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Hasonlóan egyoldali folytonosság:

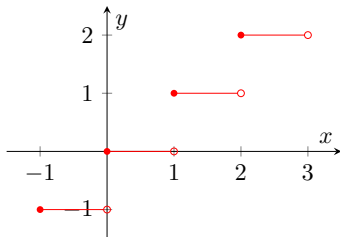
Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény **jobbról folytonos** az $x_0 \in D_f$ pontban, ha $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0)$.

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény **balról folytonos** az $x_0 \in D_f$ pontban, ha $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = f(x_0)$.

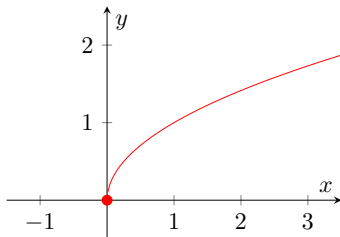
Ha egy függvény egy pontjában jobbról és balról is folytonos, akkor folytonos abban a pontban.

Példák

$f(x) = [x]$ függvény az egész helyeken jobbról folytonos, de balról nem.



$f(x) = \sqrt{x}$ függvény a 0-ban csak jobbról folytonos, hiszen csak jobbról van értelmezve.



Függvények folytonossága – pontbeli folytonosság kiterjesztése

Definíció: Általában egy $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) **függvény folytonos**, ha minden $x_0 \in D_f$ pontban folytonos.

Definíció: Az f függvény folytonos az $[a, b] \subseteq D_f$ intervallumon, ha minden $x_0 \in (a, b)$ pontban folytonos, és a -ban jobbról, b -ben balról folytonos.

Példák:

x , x^2 , $|x|$, e^x , $\sin x$, $\frac{1}{x}$ folytonosak a teljes értelmezési tartományukon.

$[x]$ egészrész függvény csak az egész pontokon kívül folytonos. Az egész értékekben csak jobbról folytonos.

A Diriclet-függvény sehol sem folytonos.

Példa

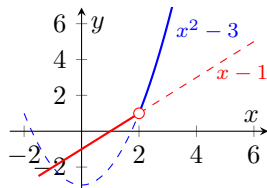
Határozzuk meg az a paraméter értékét, hogy az alábbi függvény folytonos legyen.

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{ha } x < 2 \\ a, & \text{ha } x = 2 \\ x^2 - 3, & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$

Példa

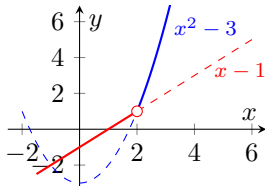
Határozzuk meg az a paraméter értékét, hogy az alábbi függvény folytonos legyen.

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{ha } x < 2 \\ a, & \text{ha } x = 2 \\ x^2 - 3, & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$



Határozzuk meg az a paraméter értékét, hogy az alábbi függvény folytonos legyen.

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{ha } x < 2 \\ a, & \text{ha } x = 2 \\ x^2 - 3, & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$



A függvény az $x \neq 2$ pontokban folytonos.

Az $x = 2$ pontban:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x - 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 - 3 = 1,$$

A függvény pontosan akkor folytonos $x = 2$ -ben, ha $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$.

Tehát az kell, hogy $a = f(2) = 1$ legyen.

Függvények folytonossággal kapcsolatos tulajdonságai

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény **folytonos** az $x_0 \in D_f$ pontban, ha a függvény határértéke és a függvény értéke megegyezik x_0 -ban:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Tétel: Egy adott x_0 pontban folytonos függvények összege, különbsége, szorzata és hányadosa (feltéve, hogy a nevező nem 0) is folytonos az x_0 pontban.

Tétel: Ha a g függvény folytonos x_0 -ban és f függvény folytonos a $g(x_0)$ -ban, akkor $f \circ g$ is folytonos x_0 -ban.

Tétel: Ha az f függvény szigorúan monoton és folytonos, akkor az f^{-1} inverz létezik és folytonos (és monoton).

Szakadási pontok

Ha egy $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény értelmezett az $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ és $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ intervallumon, de x_0 -ban nem, vagy $x_0 \in D_f$ estén a függvény ott nem folytonos, akkor x_0 a függvény **szakadási pontja**.

Osztályozásuk:

Elsőfajú szakadások: $\lim_{x \rightarrow x_0 -} f(x)$ és $\lim_{x \rightarrow x_0 +} f(x)$ létezik (valós szám)

- Megszűnethető szakadás: $\lim_{x \rightarrow x_0 -} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 +} f(x) = H$ és
 $H \neq f(x_0)$ vagy $x_0 \notin D_f$

- Ugrás: $\lim_{x \rightarrow x_0 -} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0 +} f(x)$

Másodfajú szakadások: $\lim_{x \rightarrow x_0 -} f(x)$ és/vagy $\lim_{x \rightarrow x_0 +} f(x)$ nem létezik
(esetleg $\pm\infty$)

- Pólus: $\lim_{x \rightarrow x_0 -} f(x) = \pm\infty$ és $\lim_{x \rightarrow x_0 +} f(x) = \pm\infty$

Szakadási helyek osztályozása

Elsőfajú szakadások: $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$ és $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ létezik

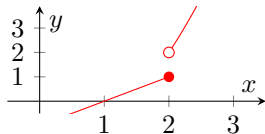
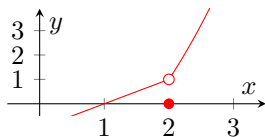
- megszüntethető szakadás

$$\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = H \text{ és}$$

$$x_0 \notin D_f \text{ vagy } H \neq f(x_0).$$

- Ugrás

$$\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$$

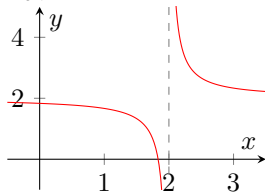


Másodfajú szakadás: $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$ és/vagy $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ nem létezik

- Pólus

$$\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = \pm\infty \text{ és}$$

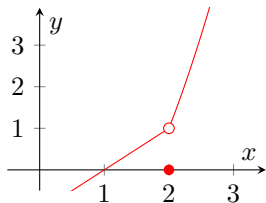
$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \pm\infty$$



• **Megszüntethető szakadás**

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{ha } x < 2 \\ 0, & \text{ha } x = 2 \\ x^2 - 3, & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$

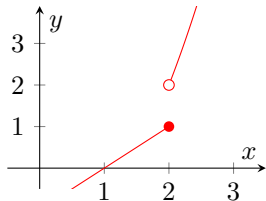
$$\lim_{x \rightarrow 2-} x - 1 = 1 = \lim_{x \rightarrow 2+} x^2 - 3$$



• **Ugrás**

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{ha } x \leq 2 \\ x^2 - 2, & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$

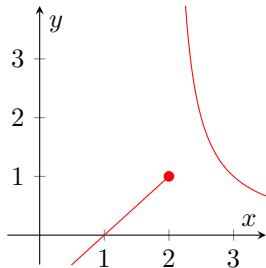
$$\lim_{x \rightarrow 2-} x - 1 = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 2+} x^2 - 2 = 2$$



• Másodfajú szakadás

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{ha } x \leq 2 \\ \frac{1}{x - 2}, & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$

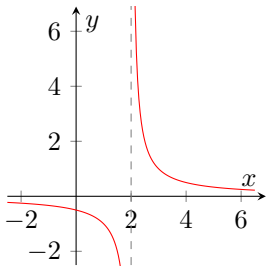
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} x - 1 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x - 2} = \infty$$



• Pólus

$$f(x) = \frac{1}{x - 2}, \quad \text{ha } x \neq 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x - 2} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x - 2} = \infty$$



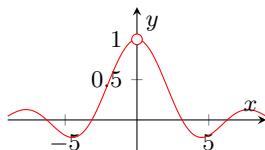
Példák

- Vizsgáljuk meg a $\frac{\sin(x)}{x}$ az $x_0 = 0$ környezetében. A függvény a 0-ban nincs értelmezve.

Nevezetes határérték, ezért

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x}.$$

Megszüntethető szakadás $x_0 = 0$ -ban.

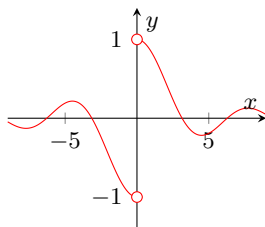


- Vizsgáljuk meg a $\frac{\sin(x)}{|x|}$ az $x_0 = 0$ környezetében. A függvény a 0-ban nincs értelmezve.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(x)}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(x)}{-x} = -1.$$

Ugrás van az $x_0 = 0$ -ban.



Példák

- Vizsgáljuk meg a $\frac{x^2 - x}{x^2 - 1}$ függvényt, mely az $x_0 = \pm 1$ -ben nincs értelmezve.

$x_0 = 1$ környezetében

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

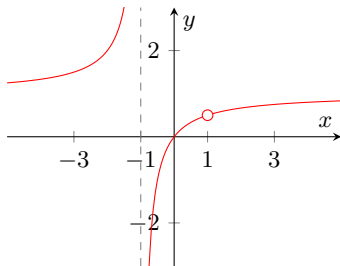
Megszüntethető szakadás $x_0 = 1$ -ben.

$x_0 = -1$ környezetében

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x+1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{x+1} = \frac{-1}{0^-} = \infty.$$

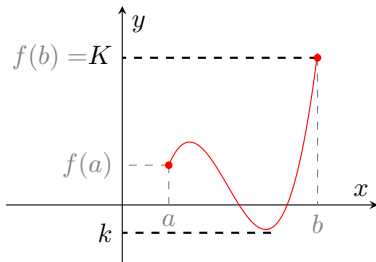
Pólus van az $x_0 = -1$ -ben.



Zárt intervallumon folytonos függvények

Tétel. Az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **zárt intervallumon folytonos függvény korlátos**, azaz létezik $k, K \in \mathbb{R}$, hogy

$$k \leq f(x) \leq K \text{ minden } x \in [a, b]\text{-re.}$$

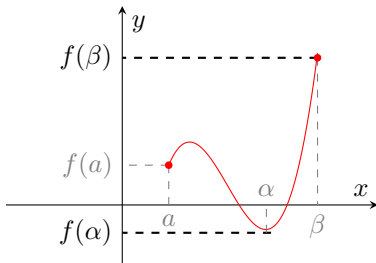


Lényeges, hogy az értelmezési tartomány zárt intervallum, pl: $f(x) = \frac{1}{x}$ a $(0, 1]$ intervallumon nem korlátos.

Zárt intervallumon folytonos függvények

Weierstrass-tétel. Az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zárt intervallumon folytonos függvény felveszi a minimum és maximum értékét, azaz van olyan $\alpha, \beta \in [a, b]$, hogy

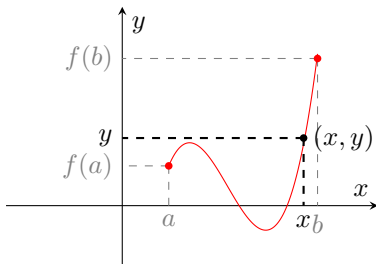
$$f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta) \text{ minden } x \in [a, b]\text{-re.}$$



A zárt intervallum itt is lényeges, ha $f(x)$ függvényt csak az (a, b) intervallumon van értelmezve, akkor nincs megfelelő β ($\beta = b \notin (a, b)$).

Zárt intervallumon folytonos függvények

Bolzano-tétel. Az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zárt intervallumon folytonos függvény az $f(a)$ és $f(b)$ között minden értéket felvesz, azaz ha $f(a) \leq y \leq f(b)$ vagy $f(b) \leq y \leq f(a)$, akkor létezik olyan $x \in [a, b]$, hogy $f(x) = y$.

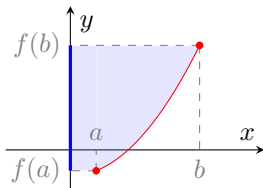


A folytonosság lényeges, mert pl. az egészrész függvény nem veszi fel az $\frac{1}{2}$ értéket.

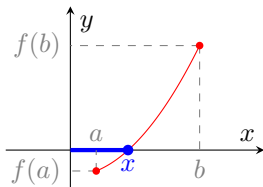
Zárt intervallumon folytonos függvények

Bolzano és Weierstrass tételének következménye.

(1) Zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény a minimuma és a maximuma között minden értéket felvesz.



(2) Az $[a, b]$ zárt intervallumon értelmezett folytonos függvénynek, ha $f(a) < 0$ és $f(b) > 0$ (vagy fordítva), akkor f -nek létezik az intervallumban gyökhelye, azaz $\exists x \in (a, b)$, hogy $f(x) = 0$.



Hyperbolikus függvények

Sinus hyperbolicus:

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, D_{\operatorname{sh}} = \mathbb{R}.$$

Monoton növekvő, páratlan.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{sh}(x) = \pm\infty$$

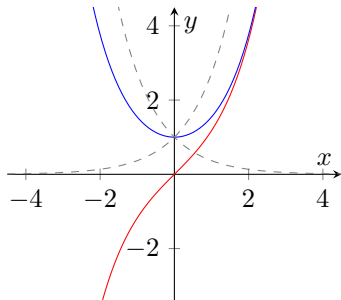
Cosinus hyperbolicus:

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, D_{\operatorname{ch}} = \mathbb{R}.$$

Alulról korlátos, páros.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{ch}(x) = \infty$$

$$\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$$



Hyperbolikus függvények

Tangens hyperbolikus:

$$\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}, D_{\operatorname{th}} = \mathbb{R}.$$

Monoton növekvő, korlátos, páratlan.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{th}(x) = \pm 1$$

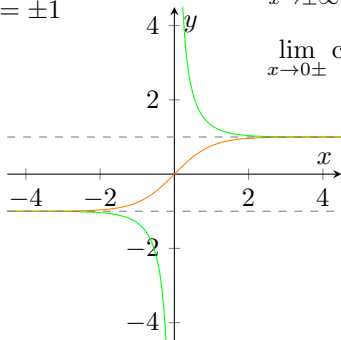
Cotangens hyperbolikus:

$$\operatorname{cth}(x) = \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)}, D_{\operatorname{cth}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Monoton csökkenő, páratlan.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{cth}(x) = \pm 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0\pm} \operatorname{cth}(x) = \pm\infty$$



Area függvények

Area sinus hyperbolikus:

$$\operatorname{sh}^{-1}(x) = \operatorname{arsh}(x), D_{\operatorname{arsh}} = \mathbb{R}.$$

Monoton növekvő, páratlan.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arsh}(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arsh}(x) = -\infty$$

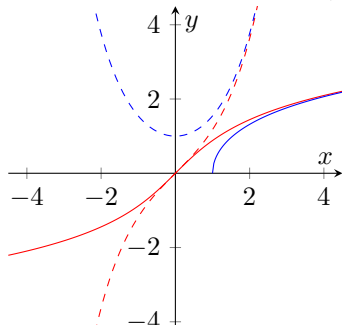
Area cosinus hyperbolikus:

$$\operatorname{ch}^{-1}(x) = \operatorname{arch}(x), D_{\operatorname{arch}} = [1, \infty).$$

Monoton növekvő.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arch}(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \operatorname{arch}(x) = 0$$



Area függvények logaritmikus alakja

Az sh függvény injektív, fejezzük ki az $\operatorname{sh}(x) = y$ egyenlet segítségével az inverz hozzárendelési szabályát:

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y$$

$$e^x - e^{-x} = 2y$$

$$(e^x)^2 - 2y \cdot (e^x) - 1 = 0$$

$$a^2 - 2y \cdot a - 1 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1} = e^x, \text{ ha } y \pm \sqrt{y^2 + 1} > 0,$$

$$\ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) = x.$$

$$\operatorname{arsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Area függvények

Area tangens hyperbolikus:

$$\operatorname{th}^{-1}(x) = \operatorname{arth}(x),$$

$$D_{\operatorname{arth}} = (-1, 1).$$

Monoton növekvő, páratlan.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \operatorname{arth}(x) = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \operatorname{arth}(x) = -\infty$$

Area cotangens hyperbolikus:

$$\operatorname{cth}^{-1}(x) = \operatorname{arcth}(x)$$

$$D_{\operatorname{arcth}} = \mathbb{R} \setminus [-1, 1].$$

Monoton csökkenő, páratlan.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{arcth}(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1^\mp} \operatorname{arcth}(x) = \pm\infty$$

