

Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2025. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia

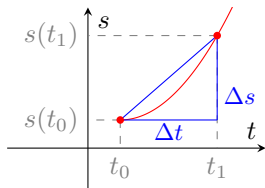
belus@math.bme.hu

geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

10. előadás:
Differenciálszámítás,
Pontbeli derivált fogalma,
Differenciálási szabályok.

Differenciálhányados

Motiváció a fizikából: mozgó pont sebessége.



$t \mapsto s(t)$: út-idő függvény

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} \text{ átlagsebesség a } [t_0, t_1]\text{-n}$$

A mozgást a pillanatnyi sebesség jobban jellemzi:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

Az $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény
 x_0 -hoz tartozó **differenciálhányados függvénye**

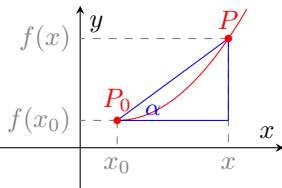
$$M_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

ahol $x_0 < x < x_0 + \delta$.

Ez a $\overline{PP_0}$ szelő meredeksége: $\operatorname{tg}(\alpha) = M_{x_0}(x)$.

A szelő egyenes egyenlete:

$$y = M_{x_0}(x)(x - x_0) + f(x_0).$$



Differenciálhányados

Definíció: Legyen az $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ az x_0 környezetében értelmezett. Ha létezik

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

az f függvény x_0 pontbeli differenciálhányados függvényének határértéke, akkor ezt a határértéket f x_0 -beli **differenciálhányadosának** (vagy **deriváltjának**) nevezzük.

Jelölése: $f'(x_0)$, $\dot{f}(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$ vagy $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0}$

Geometria jelentés: a szelők "határmeredeksége" a görbéhez a legjobban simuló egyenes (**érintő**) meredeksége $(x_0, f(x_0))$ pontban.

Ha az f függvénynek létezik a differenciálhányadosa az x_0 pontban, akkor az f **differenciálható/deriválható/diffható az x_0 -ban**.

Az f **függvény differenciálható**, ha az értelmezési tartományának minden pontjában differenciálható. Egy differenciálható f függvény **derivált függvénye**:

$$f' : x_0 \mapsto f'(x_0), \quad x_0 \in D_f.$$

Példa 1. (definíció szerinti derivált)

Legyen $f(x) = x^2$ függvény.

Differenciahányadosa az x_0 pontban:

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \\ &= \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} = \frac{2x_0h + h^2}{h} = 2x_0 + h.\end{aligned}$$

A differenciahányados határértéke minden $x_0 \in \mathbb{R}$ -ra

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + h) = 2x_0.$$

Így az f függvény derivált függvénye az $x_0 \mapsto 2x_0$ függvény.

Ezt így is írhatjuk:

$$(x^2)' = 2x.$$

Példa 2. (definíció szerinti derivált)

Legyen $f(x) = \sin(x)$ függvény.

Példa 2. (definíció szerinti derivált)

Legyen $f(x) = \sin(x)$ függvény. Differenciahányadosa az x_0 pontban:

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} = \\&= \frac{\sin(x_0) \cos h + \cos(x_0) \sin h - \sin(x_0)}{h} = \\&= \frac{\sin(x_0)(\cos h - 1) + \cos(x_0) \sin(h)}{h}\end{aligned}$$

A deriváltja minden $x_0 \in \mathbb{R}$ -ra

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0)(\cos h - 1) + \cos(x_0) \sin(h)}{h} &= \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \sin(x_0) \frac{-2 \sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{h} + \cos(x_0) \frac{\sin(h)}{h} = \\&= \lim_{h \rightarrow 0} -\sin(x_0) \sin\left(\frac{h}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} + \cos(x_0) \frac{\sin(h)}{h} = \\&= -\sin(x_0) \cdot 0 \cdot 1 + \cos(x_0) \cdot 1 = \cos(x_0).\end{aligned}$$

Tehát $(\sin x)' = \cos x$.

Néhány fontos deriváltfüggvény

$$(c)' = 0, \quad c \in \mathbb{R}, \quad (x)' = 1, \quad (x^2)' = 2x,$$

továbbá belátható: $(a \cdot x + b)' = a, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad \text{és} \quad (x^n)' = nx^{n-1}.$

$$(\sin(x))' = \cos(x), \quad \text{és hasonlóan belátható} \quad (\cos(x))' = -\sin(x),$$

$$\text{később belátjuk még:} \quad (\operatorname{tg}(x))' = \frac{1}{(\cos(x))^2}.$$

$$(e^x)' = e^x, \quad \text{később látjuk majd, hogy} \quad (a^x)' = a^x \ln(a) \quad (a > 0),$$

$$\text{és belátjuk még:} \quad (\ln(x))' = \frac{1}{x}, \quad (\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln(a)}.$$

Egyoldali deriváltak (a differenciahányados féloldali határértéke)

Mivel a pontbeli derivált határérték, ezért lehet értelmezni jobb és bal oldali deriváltat:

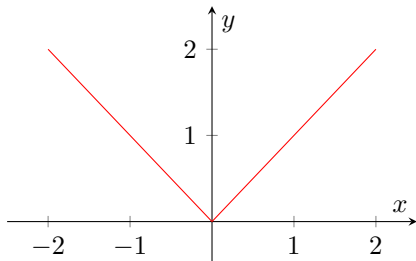
Az f függvény x_0 pontbeli jobb oldali deriváltja $\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Az f függvény x_0 pontbeli bal oldali deriváltja $\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h}$.

Példa: Legyen $f(x) = |x|$. Differenciahányadosa $x_0 = 0$ -ban:

$$\frac{f(0 \pm h) - f(0)}{\pm h} = \frac{|0 \pm h| - |0|}{\pm h} \underset{h > 0}{=} \frac{h}{\pm h} = \begin{cases} 1, & \text{ha } h > 0 \\ -1, & \text{ha } h < 0 \end{cases}$$

$h = 0$ -ban nincs határértéke, de van jobb és bal oldali határérték:



Intervallumon definiált függvényderivált

Ha adott egy **lokális függvénytulajdonság** f -re, mely egy x_0 pontban jellemzi a függvényt (vizsgálva x_0 egy kicsi környezetét, ahol értelmezve van f), akkor ezt a tulajdonságot **vizsgálhatjuk** egy teljes zárt, nyílt, félig zárt vagy nem korlátos **intervallumon is**. (Hasonlóan a folytonossághoz.)

Az f függvény deriválható $(a, b) \subset D_f$ -en, ha bármely $x_0 \in (a, b)$ belső intervallumpontban deriválható.

Az f függvény deriválható $[a, b] \subset D_f$ -en, ha bármely $x_0 \in (a, b)$ belső intervallumpontban deriválható ÉS " a "-ban jobbról, " b "-ben balról deriválható.

Az f függvény deriválható $[a, \infty) \subset D_f$ -en, ha bármely $x_0 \in (a, \infty)$ intervallumpontban folytonos ÉS " a "-ban jobbról deriválható.

Tétel. Ha az f és g függvények deriválhatóak egy x pontban, akkor

- $c \cdot f$ is deriválható ($c \in \mathbb{R}$), és $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$,
- $f + g$ is deriválható, és $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,
- $f - g$ is deriválható, és $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$,
- $f \cdot g$ is deriválható, és $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
- $\frac{f}{g}$ is deriválható ($g(x) \neq 0$), és $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Műveleti tulajdonságok bizonyítása

Bizonyítás.

- $(c \cdot f)'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c \cdot f(x) - c \cdot f(x_0)}{x - x_0} = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c \cdot f'(x_0),$
- $(f \pm g)'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f \pm g)(x) - (f \pm g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) \pm g(x) - f(x_0) \mp g(x_0)}{x - x_0}$
 $= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \pm g'(x_0),$
- $(f \cdot g)'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$
 $= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)(f(x) - f(x_0)) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} =$
 $= g(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$

Példák:

Az x^3 deriváltja:

$$(x^3)' = (x \cdot x^2)' = (x)' \cdot x^2 + x \cdot (x^2)' = 1 \cdot x^2 + x \cdot 2x = 3x^2.$$

A tangens deriváltja:

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg}(x))' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin(x))' \cos(x) - \sin(x)(\cos(x))'}{\cos^2(x)} = \\ &= \frac{\cos(x) \cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}. \end{aligned}$$

Feladatok

$$(x^3 + 3x^2 - 7x + 3)'$$

Feladatok

$$(x^3 + 3x^2 - 7x + 3)' = 3x^2 + 3 \cdot 2x - 7 \cdot 1 + 0 = 3x^2 + 6x - 7.$$

Feladatok

$$(x^3 + 3x^2 - 7x + 3)' = 3x^2 + 3 \cdot 2x - 7 \cdot 1 + 0 = 3x^2 + 6x - 7.$$

$$(x \sin(x))'$$

Feladatok

$$(x^3 + 3x^2 - 7x + 3)' = 3x^2 + 3 \cdot 2x - 7 \cdot 1 + 0 = 3x^2 + 6x - 7.$$

$$(x \sin(x))' = x' \cdot \sin(x) + x \cdot (\sin(x))' = 1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x) = \\ \sin(x) + x \cos(x).$$

$$(x^3 + 3x^2 - 7x + 3)' = 3x^2 + 3 \cdot 2x - 7 \cdot 1 + 0 = 3x^2 + 6x - 7.$$

$$(x \sin(x))' = x' \cdot \sin(x) + x \cdot (\sin(x))' = 1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x) = \sin(x) + x \cos(x).$$

$$\left(\frac{x^2}{\cos(x)} \right)'$$

$$(x^3 + 3x^2 - 7x + 3)' = 3x^2 + 3 \cdot 2x - 7 \cdot 1 + 0 = 3x^2 + 6x - 7.$$

$$(x \sin(x))' = x' \cdot \sin(x) + x \cdot (\sin(x))' = 1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x) = \sin(x) + x \cos(x).$$

$$\left(\frac{x^2}{\cos(x)} \right)' = \frac{2x \cdot \cos(x) - x^2 \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{2x \cos(x) + x^2 \sin(x)}{\cos^2(x)}.$$

$$(x^3 + 3x^2 - 7x + 3)' = 3x^2 + 3 \cdot 2x - 7 \cdot 1 + 0 = 3x^2 + 6x - 7.$$

$$(x \sin(x))' = x' \cdot \sin(x) + x \cdot (\sin(x))' = 1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x) = \sin(x) + x \cos(x).$$

$$\left(\frac{x^2}{\cos(x)} \right)' = \frac{2x \cdot \cos(x) - x^2 \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{2x \cos(x) + x^2 \sin(x)}{\cos^2(x)}.$$

$$\left(\frac{\cos(x)}{x^2} \right)'$$

$$(x^3 + 3x^2 - 7x + 3)' = 3x^2 + 3 \cdot 2x - 7 \cdot 1 + 0 = 3x^2 + 6x - 7.$$

$$(x \sin(x))' = x' \cdot \sin(x) + x \cdot (\sin(x))' = 1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x) = \sin(x) + x \cos(x).$$

$$\left(\frac{x^2}{\cos(x)} \right)' = \frac{2x \cdot \cos(x) - x^2 \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{2x \cos(x) + x^2 \sin(x)}{\cos^2(x)}.$$

$$\left(\frac{\cos(x)}{x^2} \right)' = \frac{(-\sin(x)) \cdot x^2 - (\cos(x)) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-x \sin(x) - 2 \cos(x)}{x^3}.$$

Összefoglaló: Deriválás

- Mit nevezünk egy függvény pontbeli differenciálhányados függvényének? Mi a geometriai jelentése?
- Írja le a pontbeli deriválhatóság definícióját!