

Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2025. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia

belus@math.bme.hu

geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

**11. előadás: Érintőegyenes egyenlete,
Láncszabály, Inverz függvény deriválása,
Magasabb rendű deriváltak,
Taylor-polinomok**

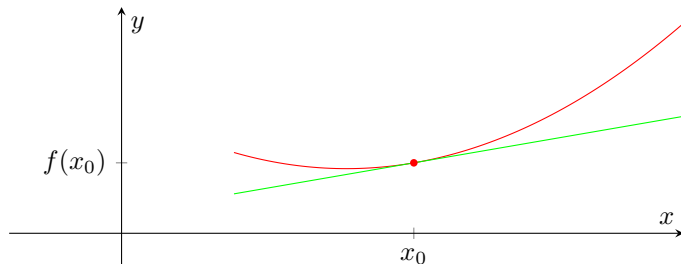
Deriválás lineáris átfogalmazása

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq D_f$) függvény az x_0 pontban differenciálható, és deriváltja x_0 -ban M , ha létezik egy $\varepsilon(x)$ függvény, melyre $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$, és

$$f(x) = M \cdot (x - x_0) + f(x_0) + \varepsilon(x) \cdot (x - x_0).$$

Tehát a függvény:

$$f(x) = \underbrace{f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)}_{\text{érintő: legjobban simuló egyenes}} + \underbrace{\varepsilon(x) \cdot (x - x_0)}_{\text{hibatag}}.$$



Érintő

Az f függvény grafikonjának érintője az x_0 pontban az $(x_0, f(x_0))$ ponton átmenő, $f'(x_0)$ meredekségű egyenes, azaz

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Példa:

Írjuk fel az $f(x) = x^2$ függvény érintőjét az $x_0 = 1$ pontban.

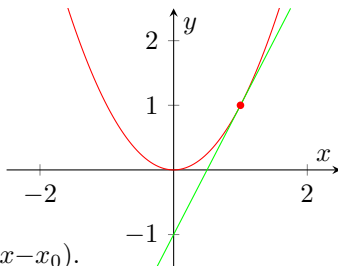
$f'(x) = 2x$, így $f'(1) = 2$.

Másrészt $f(1) = 1$, így

$$y = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1.$$

Lineáris átfogalmazásban:

$$x^2 = \underbrace{2x_0 \cdot (x - x_0)}_{M \cdot (x - x_0)} + \underbrace{x_0^2}_{f(x_0)} + \underbrace{(x - x_0)}_{\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0} (x - x_0).$$



Példa

Írjuk fel az $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ függvény érintőjét az $x_0 = 0$ pontban.

Példa

Írjuk fel az $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ függvény érintőjét az $x_0 = 0$ pontban.

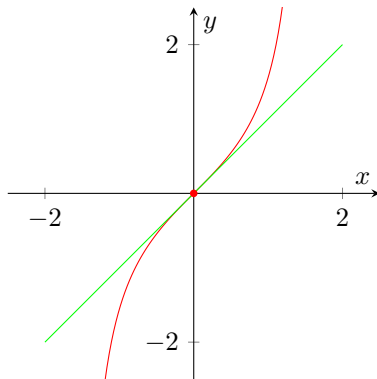
$$f'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2}, \quad \text{így } f'(0) = 1.$$

Másrészt $f(0) = 0$, így

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$y = 1(x - 0) + 0 \quad \text{azaz}$$

$$y = x.$$



Folytonosság és deriválhatóság

Tétel: Ha egy függvény egy $x_0 \in D_f$ pontban differenciálható, akkor az x_0 pontban folytonos is.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} M(x - x_0) + f(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x)(x - x_0) = \\ &= M \cdot 0 + f(x_0) + 0 \cdot 0 = f(x_0).\end{aligned}$$

FONTOS!

Visszafelé nem igaz, pl. az abszolútérték függvény a 0-ban folytonos, de ott nem differenciálható (a grafikon nem "sima", folytonosan csatlakozik, de törés van rajta).

Korábbi műveleti tulajdonságok

Tétel. Ha az f és g függvények deriválhatóak egy x pontban, akkor

- $c \cdot f$ is deriválható ($c \in \mathbb{R}$), és $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$,
- $f + g$ is deriválható, és $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,
- $f - g$ is deriválható, és $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$,
- $f \cdot g$ is deriválható, és $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
- $\frac{f}{g}$ is deriválható ($g(x) \neq 0$), és $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Néhány fontos deriváltfüggvény

$$(c)' = 0, \quad c \in \mathbb{R}, \quad (x)' = 1, \quad (x^2)' = 2x, \\ (a \cdot x + b)' = a, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad \text{és} \quad (x^n)' = nx^{n-1}.$$

$$(\sin(x))' = \cos(x), \quad \text{hasonlóan} \quad (\cos(x))' = -\sin(x), \\ \text{és beláttuk, hogy:} \quad (\operatorname{tg}(x))' = \frac{1}{(\cos(x))^2}.$$

$$(e^x)' = e^x, \quad \text{később látjuk majd, hogy} \quad (a^x)' = a^x \ln(a) \quad (a > 0), \\ \text{és belátjuk még:} \quad (\ln(x))' = \frac{1}{x}, \quad (\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln(a)}.$$

Inverz függvény deriválása

Tétel: Ha az $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény az $x \in D_f$ pont környezetében szigorúan monoton és diffható (azaz folytonos is) továbbá $f'(x) \neq 0$, akkor f^{-1} létezik, és differenciálható $y = f(x)$ -ben. Ekkor

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Példák:

- $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ monoton növekvő és deriválható, az $f^{-1}(y) = \ln(y)$

$$(\ln(y))' = \frac{1}{(e^x)'} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{\ln(y)}} = \frac{1}{y}.$$

- $f(x) = \sin(x)$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ monoton és folytonos, $f^{-1}(y) = \arcsin(y)$

$$\begin{aligned} (\arcsin y)' &= \frac{1}{(\sin(x))'} \underset{\substack{\cos(x) > 0, \\ \text{ha } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}}{=} \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin(\arcsin(y))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}. \end{aligned}$$

Hasonlóan $(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ és $(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1 + x^2}.$

Összetett függvények deriválása (láncszabály)

Tétel: Ha a g függvény differenciálható az x helyen, és az f függvény differenciálható a $g(x)$ helyen, akkor az $f \circ g$ függvény is differenciálható az x helyen, és

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Példák:

$$(\ln(\cos(x)))' = \frac{1}{\cos(x)} \cdot (-\sin(x)) = -\operatorname{tg}(x)$$

$$(e^{-x})' = e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x}$$

Hiperbolikus függvények deriváltjai:

$$(\operatorname{ch}x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh}(x)$$

$$(\operatorname{sh}x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch}(x)$$

Logaritmiкус derivált

Az a^x deriváltja ($a > 0$):

$$(a^x)' = \left(e^{\ln(a^x)}\right)' = \left(e^{x \ln(a)}\right)' = e^{x \ln(a)} \cdot \ln(a) = a^x \ln(a)$$

Példa:

$$\begin{aligned} \left(x^{\sin(x)}\right)' &= \left(e^{\sin(x) \ln(x)}\right)' = e^{\sin(x) \ln(x)} \left(\cos(x) \ln(x) + \sin(x) \frac{1}{x}\right) = \\ &= x^{\sin(x)} \left(\cos(x) \ln(x) + \sin(x) \frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

További példák

$$(\operatorname{sh}(7x + 6))'$$

További példák

$$(\operatorname{sh}(7x + 6))' = \operatorname{ch}(7x + 6) \cdot 7 = 7\operatorname{ch}(7x + 6)$$

$$(\operatorname{sh}(x))' = \operatorname{ch}(x)$$

További példák

$$(\operatorname{sh}(7x + 6))' = \operatorname{ch}(7x + 6) \cdot 7 = 7\operatorname{ch}(7x + 6)$$

$$(\operatorname{sh}(x))' = \operatorname{ch}(x)$$

$$((x + 2)^2)'$$

További példák

$$(\operatorname{sh}(7x + 6))' = \operatorname{ch}(7x + 6) \cdot 7 = 7\operatorname{ch}(7x + 6)$$

$$(\operatorname{sh}(x))' = \operatorname{ch}(x)$$

$$((x + 2)^2)' = 2(x + 2) \cdot 1 = 2x + 4$$

$$((x + 2)^2)' = (x^2 + 4x + 4)' = 2x + 4$$

További példák

$$(\operatorname{sh}(7x + 6))' = \operatorname{ch}(7x + 6) \cdot 7 = 7\operatorname{ch}(7x + 6)$$

$$(\operatorname{sh}(x))' = \operatorname{ch}(x)$$

$$((x + 2)^2)' = 2(x + 2) \cdot 1 = 2x + 4$$

$$((x + 2)^2)' = (x^2 + 4x + 4)' = 2x + 4$$

$$(3^{2-x})'$$

További példák

$$\begin{aligned}(\operatorname{sh}(7x + 6))' &= \operatorname{ch}(7x + 6) \cdot 7 = 7\operatorname{ch}(7x + 6) \\ (\operatorname{sh}(x))' &= \operatorname{ch}(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}((x + 2)^2)' &= 2(x + 2) \cdot 1 = 2x + 4 \\ ((x + 2)^2)' &= (x^2 + 4x + 4)' = 2x + 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3^{2-x})' &= 3^{2-x} \ln(3) \cdot (-1) = -3^{2-x} \ln(3) \\ (3^x)' &= 3^x \ln(3)\end{aligned}$$

Magasabb rendű deriváltak

Az $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény **másodrendű/második deriváltja** az $f'(x)$ függvény deriváltja (feltéve, hogy $f'(x)$ létezik).

Jelölés: $f''(x)$ vagy $\frac{d^2 f}{dx^2}$.

Hasonlóan definiálhatjuk a harmad, negyed stb. n -ed rendű deriváltakat.

Jelölés: $f^{(n)}(x)$ vagy $\frac{d^n f}{dx^n}$.

Példák:

$$\begin{aligned}f'(x) &= (\sin(x))' = \cos(x) \\f''(x) &= (\cos(x))' = -\sin(x) \\f'''(x) &= (-\sin(x))' = -\cos(x) \\f^{(4)}(x) &= (-\cos(x))' = \sin(x) \\f^{(5)}(x) &= (\sin(x))' = \cos(x) \\\vdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g'(x) &= (x^3 - 2x^2 + 1)' = 3x^2 - 4x \\g''(x) &= (3x^2 - 4x)' = 6x - 4 \\g'''(x) &= (6x - 4)' = 6 \\g^{(4)}(x) &= (6)' = 0 \\g^{(5)}(x) &= (0)' = 0 \\\vdots\end{aligned}$$

Közelítő polinomok

Olyan polinomot definiálunk, mely egy adott f , elég sokszor diffható függvényt valamely $x_0 \in D_f$ hely közelében megfelelően jól közelít.

Lineáris polinomra $p(x) = ax + b$, két együtthatót kell meghatározni.

Legyen a közelítő polinomnak és a függvénynek közös pontja $(x_0, f(x_0))$, azaz

$$p(x_0) = f(x_0).$$

Legyen a polinom és a függvény meredeksége azonos az x_0 helyen, azaz

$$p'(x_0) = f'(x_0).$$

Ezt a két feltételt teljesíti a $p(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ érintőegyenes.

Pl: $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$, akkor $p(x) = \cos(0)(x - 0) + 0 = x$.

Közelítő polinomok

Általában keressük $p(x) = a_n(x - x_0)^n + \dots + a_1(x - x_0) + a_0$ polinomot, illetve annak $a_n, \dots, a_1, a_0$ együtthatóit, úgy hogy

$$p(x_0) = f(x_0), p'(x_0) = f'(x_0), p''(x_0) = f''(x_0), \dots, p^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Ha $p(x_0) = f(x_0)$, akkor

$$p(x_0) = a_n 0^n + \dots + a_1 0 + a_0 = a_0 = f(x_0).$$

Ha $p'(x_0) = f'(x_0)$, akkor

$$p'(x_0) = a_n \cdot n \cdot 0^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 2 \cdot 0 + a_1 = a_1 = f'(x_0).$$

Ha $p''(x_0) = f''(x_0)$, akkor

$$p''(x_0) = a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot 0^{n-2} + \dots + a_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0 + a_2 \cdot 2 = 2a_2 = f''(x_0).$$

$\vdots$

Ha $p^n(x_0) = f^n(x_0)$, akkor

$$p^n(x_0) = a_n \cdot n \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n! \cdot a_n = f^{(n)}(x_0).$$

Tehát

$$a_0 = f(x_0), a_1 = f'(x_0), \dots, a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \dots, a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Taylor-polinom

Definíció: Az f függvény n -ed rendű Taylor-polinomja az $x_0 \in D_f$ helyen, ha ott a függvény legalább n -szer deriválható:

$$\begin{aligned} T_{f,x_0}^n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = \\ &= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \dots + \frac{f''(x_0)}{2} (x - x_0)^2 + f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \end{aligned}$$

Példa: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 7x - 1$ polinom.

$$f(0) = x^3 - 3x^2 - 7x - 1|_{x=0} = -1 \Rightarrow T_{f,0}^0 = -1$$

$$f'(0) = 3x^2 - 6x - 7|_{x=0} = -7 \Rightarrow T_{f,0}^1 = -7x - 1$$

$$f''(0) = 6x - 6|_{x=0} = -6 \xRightarrow{:2!} T_{f,0}^2 = -3x^2 - 7x - 1$$

$$f'''(0) = 6|_{x=0} = 6 \xRightarrow{:3!} T_{f,0}^3 = x^3 - 3x^2 - 7x - 1$$

$$f^{(4)}(0) = f^{(k)}(0) = 0, k \geq 4 \xRightarrow{:k!} T_{f,0}^k = T_{f,0}^4 = T_{f,0}^3$$

$T_{f,0}^3 = f(x)$, n -ed fokú polinom $\geq n$ -ed rendű Taylor-polinomja önmaga.

Példa

$$f(x) = \sin(x), \quad x_0 = 0, \text{ akkor}$$

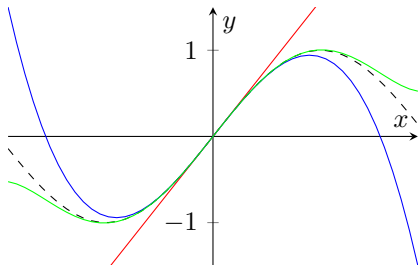
$$T_{\sin,0}^1(x) = \cos(0)(x-0) + 0 = x, \quad (\text{érintő})$$

$$T_{\sin,0}^2(x) = \frac{-\sin(0)}{2}(x-0)^2 + \cos(0)(x-0) + 0 = 0 \cdot x^2 + x + 0 = x,$$

$$\begin{aligned} T_{\sin,0}^3(x) &= \frac{-\cos(0)}{3!}(x-0)^3 - \frac{\sin(0)}{2}(x-0)^2 + \cos(0)(x-0) + 0 = \\ &= -\frac{1}{3!}x^3 + 0 \cdot x^2 + x + 0, \end{aligned}$$

$$T_{\sin,0}^4(x) = T_{\sin,0}^3(x),$$

$$T_{\sin,0}^5(x) = \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{3!}x^3 + x \quad \text{stb.}$$



Összefoglaló: Deriválás

- Írja le az érintő definícióját!
- Milyen tételt ismer egy függvény pontbeli folytonossága és deriválhatósága között?