

Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2025. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia

belus@math.bme.hu

geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

15. előadás: Teljes függvényvizsgálat

Függvényvizsgálat

Adott egy $f(x)$ függvény, megállapítjuk:

1. értelmezési tartomány
2. zérushely
3. globális tul.: paritás, periodicitás
4. értelmezési tartomány szélein határértékek
 - aszimptoták
5. első derivált
 - monotonitási tulajdonságok
 - lokális szélsőértékek
6. második derivált
 - konvexitás
 - inflexiós pontok
7. szemantikus ábra
8. értékkészlet

Az e^{-x^2} függvény vizsgálata

Legyen $f(x) = e^{-x^2}$ (Gauss- vagy haranggörbe).

Az e^{-x^2} függvény vizsgálata

Legyen $f(x) = e^{-x^2}$ (Gauss- vagy haranggörbe).

1. értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$
2. zérushely: nincs, mindenütt pozitív
3. paritás: $f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$, tehát páros
periodicitás: nem periodikus
4. értelmezési tartomány szélein határértékek:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2} = 0, \text{ mert } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2} = 0 \quad (\text{páros függvény})\end{aligned}$$

Így vízszintes aszimptota is van a $\pm\infty$ -ben: $y = 0$ egyenes.

Az e^{-x^2} függvény vizsgálata – folytatás

5. első derivált: $f'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x)$, melynek 0-ban van nullhelye

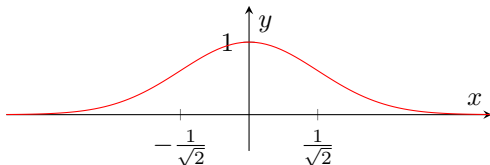
	$x < 0$	0	$0 < x$
f'	+	0	-
f	sz.m.nő	lok. max.	sz.m.csökken

Az $x = 0$ -ban lokális maximum van, melynek értéke: $f(0) = e^0 = 1$.

6. második derivált: $f''(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x)^2 + e^{-x^2} \cdot (-2) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$,
melynek nullhelyei: $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

	$x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} < x$
f''	+	0	-	0	+
f	konvex	infl.pont	konkáv	infl.pont	konvex

7.



8. értékészlet: $(0, 1]$

$f(x) = x^3 - 3x - 2$ teljes függvényvizsgálata

$f(x) = x^3 - 3x - 2$ teljes függvényvizsgálata

1. értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$
2. zérushely: racionális gyökök csak a 2 osztói lehetnek: $\pm 1, \pm 2$, melyek közül 2 és a -1 gyök, utóbbi kétszeres. Így a függvény szorzat alakja: $f(x) = x^3 - 3x - 2 = (x + 1)^2(x - 2)$
3. paritás: $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) - 2 = -x^3 + 3x - 2 = -f(x) - 4$, tehát (valószínűleg) nincs paritása,
hivatkozhatunk a nullhelyekre is (nem szimmetrikusak az origóra),
vagy
 $f(1) = -4$ és $f(-1) = 0$ se nem egyenlőek, se nem ellentettek.
periodicitás: nem periodikus (véges sok nullhely)

$f(x) = x^3 - 3x - 2$ teljes függvényvizsgálata

4. értelmezési tartomány szélein határértékek:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - 3x - 2 = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 3x - 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = -\infty$$

Ferde aszimptota van-e?

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - 3 - \frac{2}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = +\infty, \end{aligned}$$

így nincs ferde aszimptota a $+\infty$ -ben.

Hasonló számolással kapjuk, hogy a $-\infty$ -ben sincsen.

$f(x) = x^3 - 3x - 2$ teljes függvényvizsgálata

5. első derivált: $f'(x) = 3x^2 - 3$,

melynek $x^2 = 1$ esetén, azaz ± 1 -ben van nullhelye

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f'	+	0	-	0	+
f	sz.m.nő	lok.max.	sz.m.csökken	lok.min.	sz.m.nő

Tehát a -1 lokális maximumhely, értéke: $f(-1) = 0$,

míg az 1 lokális minimumhely, értéke: $f(1) = -4$.

6. második derivált: $f''(x) = 3 \cdot 2x = 6x$, melynek nullhelye a 0 , itt $f(0) = -2$.

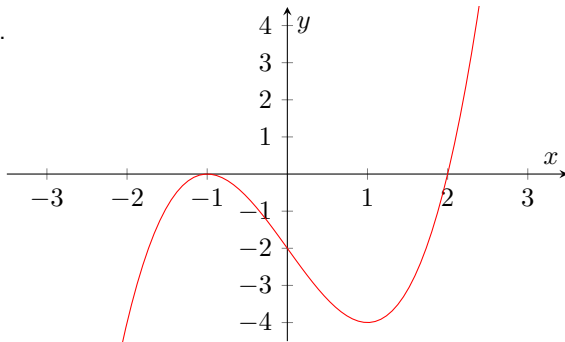
	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
f''	-	0	+
f	konkáv	infl. pont	konvex

$f(x) = x^3 - 3x - 2$ teljes függvényvizsgálata

Egy táblázatban:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
f'	+	0	-			0	+
	sz.m.nő	lok.max.	sz.m.csökken			lok.min	sz.m.nő
f''	-			0	+		
	konkáv			infl.pont	konvex		

7.



8. értékkészlet: $\mathbb{R}$

$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2}$ teljes függvényvizsgálata

$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2}$ teljes függvényvizsgálata

1. értelmezési tartomány: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
2. zérushely: $x^3 + 1 = 0$ esetén, azaz $x = -1$.
3. paritás: nincsen, hiszen ha lenne, akkor 1 is nullhely lenne.
periodicitás: nem periodikus (csak egy nullhely)
4. értelmezési tartomány szélein határértékek:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^3 + 1}{x^2} = +\infty$$
$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x^3 + 1}{x^2} = +\infty$$

Tehát az $x = 0$ -ban függőleges aszimptota van.

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2} \text{ teljes függvényvizsgálata}$$

4. értelmezési tartomány szélein határértékek (folytatás):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} x + \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \frac{1}{x^2} = -\infty$$

Ferde aszimptota van-e?

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3+1}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{x^3} = 1$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 1}{x^2} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1 - x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0 \end{aligned}$$

így az $y = x$ egyenletű egyenes a ferde aszimptota a $+\infty$ -ben.

Hasonló számolással kapjuk, hogy a $-\infty$ -ben is az $y = x$ egyenletű egyenes a ferde aszimptota.

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2} \text{ teljes függvényvizsgálata}$$

5. első derivált:

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot x^2 - (x^3 + 1)2x}{(x^2)^2} = \frac{3x^4 - 2x^4 - 2x}{(x^2)^2} = \frac{x^3 - 2}{x^3},$$

melynek $\sqrt[3]{2}$ -ben van nullhelye.

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \sqrt[3]{2})$	$\sqrt[3]{2}$	$(\sqrt[3]{2}, +\infty)$
f'	+	n. é.	-	0	+
f	$\nearrow$	n. é.	$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$

Tehát a $\sqrt[3]{2}$ lokális min.hely, értéke: $f(\sqrt[3]{2}) = \frac{(\sqrt[3]{2})^3 + 1}{(\sqrt[3]{2})^2} \approx 1,89$.

6. második: $f''(x) = \frac{3x^2 \cdot x^3 - (x^3 - 2)3x^2}{(x^3)^2} = \frac{3x^5 - (3x^5 - 6x^2)}{x^6} = \frac{6}{x^4},$

melynek nincs nullhelye.

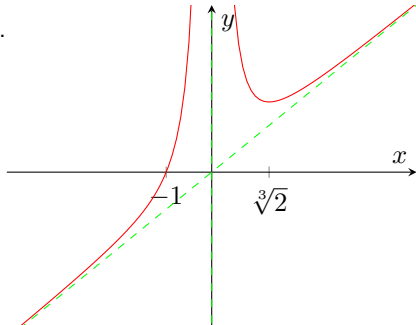
	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
f''	+	n. é.	+
f	$\cup$	n. é.	$\cup$

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2} \text{ teljes függvényvizsgálata}$$

Az előzőek egyetlen táblázatban:

	$(-\infty, 0)$	$(0, \sqrt[3]{2})$	$\sqrt[3]{2}$	$(\sqrt[3]{2}, +\infty)$
f'	+	-	0	+
f	$\nearrow$	$\searrow$	lok.min.	$\nearrow$
f''	+		+	
f	$\cup$		$\cup$	

7.



8. értékkészlet: $\mathbb{R}$

$f(x) = x - \operatorname{arctg}(x)$ teljes függvényvizsgálata

$f(x) = x - \operatorname{arctg}(x)$ teljes függvényvizsgálata

1. értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$
2. zérushely: $x = 0$ -ban zérus a függvény, más nullhely nincs, mert látni fogjuk, hogy szigorúan monoton nő.
3. paritás: páratlan (felhasználva, hogy az arctg függvény páratlan):
$$f(-x) = -x - \operatorname{arctg}(-x) = -x - (-\operatorname{arctg}(x)) = -f(x)$$

periodicitás: nem periodikus (csak egy zérushely)

$f(x) = x - \operatorname{arctg}(x)$ teljes függvényvizsgálata

4. értelmezési tartomány szélein határértékek:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \operatorname{arctg}(x) = +\infty \text{ (mert az arctg függvény korlátos)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x - \operatorname{arctg}(x) = -\infty \text{ (mert az arctg függvény korlátos)}$$

aszimptoták (ferde aszimptoták lehetnek):

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \operatorname{arctg}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = \lim_{x \rightarrow \infty} x - \operatorname{arctg}(x) - x = \lim_{x \rightarrow \infty} -\operatorname{arctg}(x) = -\frac{\pi}{2}$$

Tehát az aszimptota egyenlete a $+\infty$ -ben $y = x - \frac{\pi}{2}$.

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \operatorname{arctg}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - ax = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - \operatorname{arctg}(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2}$$

Tehát az aszimptota egyenlete a $-\infty$ -ben $y = x + \frac{\pi}{2}$.

$f(x) = x - \arctg(x)$ teljes függvényvizsgálata

5.-6. első és második derivált:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$$

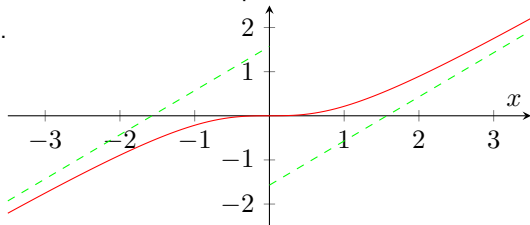
$$f''(x) = \frac{2x(1+x^2) - x^2 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2x + 2x^3 - 2x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

	$x < 0$	0	$0 < x$
f'	+	0	+
f	sz.m. nő	–	sz.m. nő

	$x < 0$	0	$0 < x$
f''	–	0	+
f	konkáv	infl.	konvex

A 0-ban nincs lokális szélsőérték ($f(0) = 0$), a függvény monoton nő $\mathbb{R}$ -en, de inflexiós pont azonban van.

7.



8. értékészlet $\mathbb{R}$.