

Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2025. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia

belus@math.bme.hu

geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

**16. előadás: Primitív függvény,
határozatlan integrál,
alapintegrálok, műveleti tételek**

Primitív függvény

Definíció: Az $F(x)$ függvény az $f(x)$ függvény **primitív függvénye** az $I \subseteq D_f$ nyílt intervallumon, ha ott F deriválható és $F'(x) = f(x)$ teljesül minden $x \in I$ -re.

Általában a megfelelő nagybetűvel jelöljük a primitív függvényt.

Példa:

$f(x) = 3x^2$ esetén $F(x) = x^3$ jó

vagy

$F(x) = x^3 + 1$ esetén $F'(x) = (x^3 + 1)' = 3x^2 + 0,$

sőt bármilyen $c \in \mathbb{R}$ -re $F(x) = x^3 + c$ jó

$$F'(x) = (x^3 + c)' = 3x^2 + 0 = f(x).$$

Primitív függvény

Tétel: Ha $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$ az I intervallumon, akkor van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy $F_1(x) = F_2(x) + c$. Azaz a primitív függvény konstans erejéig egyértelmű.

Tekintsük az $f(x)$ függvény primitív függvényeinek halmazát az $I \subseteq D_f$ intervallumon

$$\mathcal{F} = \{F(x) \mid F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I\}.$$

Ezt a függvényhalmazt f **határozatlan integráljának** nevezzük az I intervallumon.

Jelölése:

$$\int f(x) \, dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Példa:

$$\int 3x^2 \, dx = \{x^3 + c \mid c \in \mathbb{R}\} = x^3 + c.$$

Folytonosság és integrálhatóság

Tétel: Ha az $f(x)$ függvény folytonos, akkor van primitív függvénye.

Indoklás később.

Habár a folytonosság elégséges feltétele a primitív függvény létezésének, ez nem jelenti azt, hogy elemi függvények segítségével felírható a primitív függvény.

Például az $f(x) = e^{-x^2}$ függvénynek van primitív függvénye, hiszen folytonos, de nem tudjuk felírni az általunk ismert függvényekkel.

Műveleti tulajdonságok

Tétel:

$$\int f(x) + g(x) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$$

$$\int f(x) - g(x) \, dx = \int f(x) \, dx - \int g(x) \, dx$$

$$\int cf(x) \, dx = c \int f(x) \, dx \quad c \in \mathbb{R}$$

A deriválási szabályok megfordításából következnek.

Elemi függvények integráljai

Mivel $(x)' = 1$, így $\int 1 \, dx = x + c$.

$(x^n)' = nx^{n-1}$, így

$$\int nx^{n-1} \, dx = x^n + c$$

$$\int x^{n-1} \, dx = \frac{1}{n} x^n + c, \quad \text{ha } n \neq 0$$

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c, \quad \text{ha } n \neq -1$$

Tudjuk, hogy $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$, ha $x > 0$, így

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln(x) + c, \quad \text{ha } x > 0$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c, \quad \text{ha } x \neq 0$$

Elemi függvények integráljai – táblázat

f	$\int f \, dx$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c \quad x \neq 0$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$
e^x	$e^x + c$
$\operatorname{ch}(x)$	$\operatorname{sh}(x) + c$
$\operatorname{sh}(x)$	$\operatorname{ch}(x) + c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg}(x) + c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + c \quad x < 1$

Példák

$$\int x^3 + 4x^2 - 5 \, dx =$$

Példák

$$\int x^3 + 4x^2 - 5 \, dx = \frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} - 5x + c = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 5x + c$$

Példák

$$\int x^3 + 4x^2 - 5 \, dx = \frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} - 5x + c = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 5x + c$$

$$\int x^2 \sqrt{x} \, dx =$$

Példák

$$\int x^3 + 4x^2 - 5 \, dx = \frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} - 5x + c = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 5x + c$$

$$\int x^2 \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{5}{2}} \, dx = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + c = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + c = \frac{2}{7}\sqrt{x^7} + c$$

Példák

$$\int x^3 + 4x^2 - 5 \, dx = \frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} - 5x + c = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 5x + c$$

$$\int x^2 \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{5}{2}} \, dx = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + c = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + c = \frac{2}{7}\sqrt{x^7} + c$$

$$\int 3 \sin(x) + \sqrt{\frac{2}{1+x^2}} \, dx =$$

Példák

$$\int x^3 + 4x^2 - 5 \, dx = \frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} - 5x + c = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 5x + c$$

$$\int x^2 \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{5}{2}} \, dx = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + c = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + c = \frac{2}{7}\sqrt{x^7} + c$$

$$\begin{aligned} \int 3 \sin(x) + \sqrt{\frac{2}{1+x^2}} \, dx &= \int 3 \sin(x) + \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx = \\ &= -3 \cos(x) + \sqrt{2} \operatorname{arsh}(x) + c \end{aligned}$$

Feladat

Határozzuk meg azt az $f(x)$ függvényt, melyre

$$f'(x) = \cos(x) \quad \text{és} \quad f(0) = 5.$$

Feladat

Határozzuk meg azt az $f(x)$ függvényt, melyre

$$f'(x) = \cos(x) \quad \text{és} \quad f(0) = 5.$$

$$f'(x) = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = \sin(x) + c$$

$$f(0) = \sin(0) + c = 5 \quad \Rightarrow \quad c = 5$$

$$f(x) = \sin(x) + 5$$

Feladat

Határozzuk meg azt az $f(x)$ függvényt, melyre

$$f''(x) = x \quad \text{és} \quad f'(2) = 1 \quad \text{és} \quad f(1) = 0.$$

Feladat

Határozzuk meg azt az $f(x)$ függvényt, melyre

$$f''(x) = x \quad \text{és} \quad f'(2) = 1 \quad \text{és} \quad f(1) = 0.$$

$$f''(x) = x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$f'(2) = \frac{2^2}{2} + c_1 = 2 + c_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -1$$

$$f'(x) = \frac{x^2}{2} - 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} - x + c_2 = \frac{x^3}{6} - x + c_2$$

$$f(1) = \frac{1}{6} - 1 + c_2 = -\frac{5}{6} + c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{5}{6}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{6} - x + \frac{5}{6}$$

Összefoglaló: Határozatlan integrál

- Definiálja a primitív függvényt!
- Milyen tételt ismer egy függvény primitív függvényeinek számával kapcsolatban?
- Definiálja egy függvény határozatlan integrálját!