

Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2025. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia

belus@math.bme.hu

geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

17. előadás:
Egyszerű helyettesítés módszere,
Parciális integrálás,
Teljes helyettesítés

Első helyettesítési szabály - a láncszabály megfordítása

Tétel (Egyszerű helyettesítés): Ha az $f(x)$ függvény primitív függvénye $F(x)$, akkor

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = F(g(x)) + c.$$

Bizonyítás:

$$(F(g(x)) + c)' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Első helyettesítési szabály - a láncszabály megfordítása

Tétel (Egyszerű helyettesítés): Ha az $f(x)$ függvény primitív függvénye $F(x)$, akkor

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = F(g(x)) + c.$$

Bizonyítás:

$$(F(g(x)) + c)' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Példa:

$$\int \sin(5x - 7) \, dx =$$

Első helyettesítési szabály - a láncszabály megfordítása

Tétel (Egyszerű helyettesítés): Ha az $f(x)$ függvény primitív függvénye $F(x)$, akkor

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = F(g(x)) + c.$$

Bizonyítás:

$$(F(g(x)) + c)' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Példa:

$$\int \sin(5x - 7) \, dx = \frac{1}{5} \int \sin(5x - 7) \cdot 5 \, dx =$$

Első helyettesítési szabály - a láncszabály megfordítása

Tétel (Egyszerű helyettesítés): Ha az $f(x)$ függvény primitív függvénye $F(x)$, akkor

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = F(g(x)) + c.$$

Bizonyítás:

$$(F(g(x)) + c)' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Példa:

$$\begin{aligned} \int \sin(5x - 7) \, dx &= \frac{1}{5} \int \sin(5x - 7) \cdot 5 \, dx = \\ &= -\frac{\cos(5x - 7)}{5} + c, \end{aligned}$$

ahol $f(x) = \sin(x)$, $F(x) = -\cos(x)$, $g(x) = 5x - 7$, $g'(x) = 5$.

Példák

$$\int \cos(2x) \, dx =$$

Példák

$$\int \cos(2x) \, dx = \frac{\sin(2x)}{2} + c,$$

Példák

$$\int \cos(2x) \, dx = \frac{\sin(2x)}{2} + c,$$

$$\int \sin^2(x) \, dx =$$

Példák

$$\int \cos(2x) \, dx = \frac{\sin(2x)}{2} + c,$$

$$\int \sin^2(x) \, dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + c$$

Példák

$$\int \cos(2x) \, dx = \frac{\sin(2x)}{2} + c,$$

$$\int \sin^2(x) \, dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + c$$

$$\int \frac{1}{x-2} \, dx =$$

Példák

$$\int \cos(2x) \, dx = \frac{\sin(2x)}{2} + c,$$

$$\int \sin^2(x) \, dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + c$$

$$\int \frac{1}{x-2} \, dx = \ln|x-2| + c$$

Példák

$$\int \cos(2x) \, dx = \frac{\sin(2x)}{2} + c,$$

$$\int \sin^2(x) \, dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + c$$

$$\int \frac{1}{x-2} \, dx = \ln|x-2| + c$$

$$\int \frac{1}{(x-2)^2} \, dx =$$

Példák

$$\int \cos(2x) \, dx = \frac{\sin(2x)}{2} + c,$$

$$\int \sin^2(x) \, dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + c$$

$$\int \frac{1}{x-2} \, dx = \ln|x-2| + c$$

$$\int \frac{1}{(x-2)^2} \, dx = \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x-2} + c$$

Példák

$$\int \cos(2x) \, dx = \frac{\sin(2x)}{2} + c,$$

$$\int \sin^2(x) \, dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + c$$

$$\int \frac{1}{x-2} \, dx = \ln|x-2| + c$$

$$\int \frac{1}{(x-2)^2} \, dx = \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x-2} + c$$

$$\int (2x-3)^{100} \, dx =$$

Példák

$$\int \cos(2x) \, dx = \frac{\sin(2x)}{2} + c,$$

$$\int \sin^2(x) \, dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + c$$

$$\int \frac{1}{x-2} \, dx = \ln|x-2| + c$$

$$\int \frac{1}{(x-2)^2} \, dx = \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x-2} + c$$

$$\int (2x-3)^{100} \, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-3)^{101}}{101} + c = \frac{(2x-3)^{101}}{202} + c$$

$$\int f(ax+b) \, dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c.$$

Példák - Általában

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx =$$

Példák - Általában

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int 2 \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}} + c$$

ahol $g(x) = \sqrt{x}$, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f(x) = e^x$, $F(x) = e^x$

$$\int \operatorname{tg}(x) dx =$$

Példák - Általában

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int 2 \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}} + c$$

ahol $g(x) = \sqrt{x}$, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f(x) = e^x$, $F(x) = e^x$

$$\int \operatorname{tg}(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = \int \frac{1}{\cos(x)} \cdot \sin(x) dx = -\ln |\cos(x)| + c$$

Példák - Általában

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int 2 \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}} + c$$

ahol $g(x) = \sqrt{x}$, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f(x) = e^x$, $F(x) = e^x$

$$\int \operatorname{tg}(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = \int \frac{1}{\cos(x)} \cdot \sin(x) dx = -\ln |\cos(x)| + c$$

$$\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx =$$

Példák - Általában

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int 2 \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}} + c$$

ahol $g(x) = \sqrt{x}$, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f(x) = e^x$, $F(x) = e^x$

$$\int \operatorname{tg}(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = \int \frac{1}{\cos(x)} \cdot \sin(x) dx = -\ln |\cos(x)| + c$$

$$\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx = \operatorname{arctg}(e^x) + c$$

Példák - Általában

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int 2 \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}} + c$$

ahol $g(x) = \sqrt{x}$, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f(x) = e^x$, $F(x) = e^x$

$$\int \operatorname{tg}(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = \int \frac{1}{\cos(x)} \cdot \sin(x) dx = -\ln |\cos(x)| + c$$

$$\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx = \operatorname{arctg}(e^x) + c$$

$$\int \cos^3(x) dx =$$

Példák - Általában

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int 2 \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}} + c$$

ahol $g(x) = \sqrt{x}$, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f(x) = e^x$, $F(x) = e^x$

$$\int \operatorname{tg}(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = \int \frac{1}{\cos(x)} \cdot \sin(x) dx = -\ln |\cos(x)| + c$$

$$\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx = \operatorname{arctg}(e^x) + c$$

$$\begin{aligned} \int \cos^3(x) dx &= \int (1 - \sin^2(x)) \cdot \cos(x) dx = \\ &= \int \cos(x) dx - \int \sin^2(x) \cdot \cos(x) dx = -\sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3} + c \end{aligned}$$

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + c.$$

Parciális integrálás

A szorzatra vonatkozó deriválási szabály:

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = (f(x)g(x))'.$$

Integrálva az egyenlet mindkét oldalát

$$\int f'(x)g(x) + f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) + c.$$

Átrendezve az egyenletet

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx.$$

Ezt nevezzük **parciális integrálásnak**.

Példa:

$$\int \underbrace{x}_f \underbrace{\cos(x)}_{g'} dx = \underbrace{x \sin(x)}_{f \cdot g} - \int \underbrace{\sin(x)}_{f' \cdot g} dx = x \sin(x) + \cos(x) + c$$

ahol $f(x) = x$, $f'(x) = 1$ illetve $g'(x) = \cos(x)$, $g(x) = \sin(x)$.

Többszörös alkalmazás

$$\int \underbrace{x^2}_f \underbrace{e^{3x}}_{g'} dx =$$

Többszörös alkalmazás

$$\int \underbrace{x^2}_f \underbrace{e^{3x}}_{g'} dx = \underbrace{x^2 \frac{e^{3x}}{3}}_{fg} - \int \underbrace{2x \frac{e^{3x}}{3}}_{f'g} dx =$$

ahol $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$ és $g'(x) = e^{3x}$, $g(x) = \frac{e^{3x}}{3}$,

Többszörös alkalmazás

$$\int \underbrace{x^2}_f \underbrace{e^{3x}}_{g'} dx = \underbrace{x^2 \frac{e^{3x}}{3}}_{fg} - \int \underbrace{2x \frac{e^{3x}}{3}}_{f'g} dx =$$

$$\text{ahol } f(x) = x^2, f'(x) = 2x \quad \text{és} \quad g'(x) = e^{3x}, g(x) = \frac{e^{3x}}{3},$$

$$= \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3} \int \underbrace{x}_f \underbrace{e^{3x}}_{g'} dx = \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3} \underbrace{\left(x \frac{e^{3x}}{3} \right)}_{fg} + \frac{2}{3} \int \underbrace{1 \cdot \frac{e^{3x}}{3}}_{f'g} dx =$$

$$\text{ahol } f(x) = x, f'(x) = 1 \quad \text{és} \quad g'(x) = e^{3x}, g(x) = \frac{e^{3x}}{3},$$

Többszörös alkalmazás

$$\int \underbrace{x^2}_f \underbrace{e^{3x}}_{g'} dx = \underbrace{x^2 \frac{e^{3x}}{3}}_{fg} - \int \underbrace{2x \frac{e^{3x}}{3}}_{f'g} dx =$$

$$\text{ahol } f(x) = x^2, f'(x) = 2x \quad \text{és} \quad g'(x) = e^{3x}, g(x) = \frac{e^{3x}}{3},$$

$$= \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3} \int \underbrace{x}_f \underbrace{e^{3x}}_{g'} dx = \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3} \underbrace{\left(x \frac{e^{3x}}{3} \right)}_{fg} + \frac{2}{3} \int \underbrace{1 \cdot \frac{e^{3x}}{3}}_{f'g} dx =$$

$$\text{ahol } f(x) = x, f'(x) = 1 \quad \text{és} \quad g'(x) = e^{3x}, g(x) = \frac{e^{3x}}{3},$$

$$= \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2x e^{3x}}{9} + \frac{2e^{3x}}{27} + c.$$

Integrálegyenlet rendezése

$$\int \underbrace{e^x}_{g'} \underbrace{\sin(2x)}_f dx = e^x \sin(2x) - \int 2e^x \cos(2x) dx =$$

ahol $f(x) = \sin(2x)$, $f'(x) = 2 \cos(2x)$ és $g'(x) = e^x$, $g(x) = e^x$

$$= e^x \sin(2x) - 2 \int \underbrace{e^x}_{g'} \underbrace{\cos(2x)}_f dx = e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x) - 4 \int e^x \sin(2x) dx$$

ahol $f(x) = \cos(2x)$, $f'(x) = -2 \sin(2x)$ és $g'(x) = e^x$, $g(x) = e^x$

Integrálegyenlet rendezése

$$\int \underbrace{e^x}_{g'} \underbrace{\sin(2x)}_f dx = e^x \sin(2x) - \int 2e^x \cos(2x) dx =$$

ahol $f(x) = \sin(2x)$, $f'(x) = 2 \cos(2x)$ és $g'(x) = e^x$, $g(x) = e^x$

$$= e^x \sin(2x) - 2 \int \underbrace{e^x}_{g'} \underbrace{\cos(2x)}_f dx = e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x) - 4 \int e^x \sin(2x) dx$$

ahol $f(x) = \cos(2x)$, $f'(x) = -2 \sin(2x)$ és $g'(x) = e^x$, $g(x) = e^x$

Így a teljes egyenletet rendezve

$$\int e^x \sin(2x) dx = e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x) - 4 \int e^x \sin(2x) dx$$

$$5 \int e^x \sin(2x) dx = e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x) + c$$

$$\int e^x \sin(2x) dx = \frac{1}{5} e^x \sin(2x) - \frac{2}{5} e^x \cos(2x) + c$$

Parciális integrálás és az inverz függvények

$$\int \ln(x) \, dx =$$

Parciális integrálás és az inverz függvények

$$\int \ln(x) \, dx = \int 1 \cdot \ln(x) \, dx = x \ln(x) - \int \frac{1}{x} x \, dx =$$

ahol $f(x) = \ln(x)$, $f'(x) = \frac{1}{x}$ és $g'(x) = 1$, $g(x) = x$

$$= x \ln(x) - \int 1 \, dx = x \ln(x) - x + c.$$

Parciális integrálás és az inverz függvények

$$\int \ln(x) \, dx = \int 1 \cdot \ln(x) \, dx = x \ln(x) - \int \frac{1}{x} x \, dx =$$

ahol $f(x) = \ln(x)$, $f'(x) = \frac{1}{x}$ és $g'(x) = 1$, $g(x) = x$

$$= x \ln(x) - \int 1 \, dx = x \ln(x) - x + c.$$

$$\int \operatorname{arctg}(x) \, dx =$$

Parciális integrálás és az inverz függvények

$$\int \ln(x) \, dx = \int 1 \cdot \ln(x) \, dx = x \ln(x) - \int \frac{1}{x} x \, dx =$$

$$\text{ahol } f(x) = \ln(x), \quad f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{és} \quad g'(x) = 1, \quad g(x) = x$$

$$= x \ln(x) - \int 1 \, dx = x \ln(x) - x + c.$$

$$\int \arctg(x) \, dx = x \arctg(x) - \int \frac{x}{x^2 + 1} \, dx =$$

$$\text{ahol } f(x) = \arctg(x), \quad f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad \text{és} \quad g'(x) = 1, \quad g(x) = x$$

$$= x \arctg(x) - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} \, dx = x \arctg(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c.$$

Teljes helyettesítés - Bevezető példa

A feladatban az összetett függvény mellett nem jelenik meg a belső függvény deriváltja, például:

$$\int \sin(\sqrt{x}) \, dx$$

Ekkor új változót vezetünk be $t = \sqrt{x}$, és a régi változót kifejezzük az újjal $t^2 = x$. Lederiválva az egyenletet

$$2t = \frac{dx}{dt},$$

így kifejezhető $dx = 2t \, dt$, tehát

$$\int \sin(\sqrt{x}) \, dx \stackrel{dx=2t \, dt}{=} \int \sin(t) 2t \, dt = 2 \int t \sin(t) \, dt$$

Ezt az integrált már parciális integrálással ki tudjuk számítani

$$2 \int t \sin(t) \, dt = 2t(-\cos(t)) - 2 \int -\cos(t) \, dt = -2t \cos(t) + 2 \sin(t) + c,$$

$$\text{ahol } f(t) = t, f'(t) = 1 \text{ és } g'(t) = \sin(t), g(t) = -\cos(t)$$

A végeredménybe még az eredeti változót vissza kell írni:

$$\int \sin(\sqrt{x}) \, dx = -2t \cos(t) + 2 \sin(t) + c = -2\sqrt{x} \cos(\sqrt{x}) + 2 \sin(\sqrt{x}) + c.$$

Teljes helyettesítés - Általában

- A feladatban az összetett függvény mellett nem jelenik meg a belső függvény deriváltja, ezért alkalmas új változót jelölünk ki, és a régi változót kifejezzük az újjal $g(t) = x$.
- Lederiválva az egyenletet

$$g'(t) = \frac{dx}{dt},$$

így kifejezhető $dx = g'(t) dt$.

- Változócserét hajtunk végre az integrálon

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) g'(t) dt.$$

- A végeredménybe visszaírjuk az eredeti változót.

Példa

$$\int \frac{e^{2x}}{1 + e^x} dx =$$

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx = \int \frac{t^2}{1+t} \frac{1}{t} dt = \int \frac{t}{1+t} dt =$$

$t = e^x \rightsquigarrow x = \ln(t)$, így $g(t) = \ln(t)$, melynek deriváltja: $g'(t) = \frac{1}{t}$

$$= \int \frac{1+t-1}{1+t} dt = \int 1 - \frac{1}{1+t} dt = t - \ln|1+t| + c =$$

Végül visszaírjuk az eredeti változót:

$$= e^x - \ln(1+e^x) + c$$

Példa - helyettesítés trigonometrikus és hyperbolikus függvényekkel

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Példa - helyettesítés trigonometrikus és hyperbolikus függvényekkel

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\cos(t)} \cos(t) dt = \int 1 dt = t + c = \arcsin(x) + c$$

$$x = \sin(t) \rightsquigarrow t = \arcsin(x), \quad \frac{dx}{dt} = \cos(t) \rightsquigarrow dx = \cos(t) dt,$$

$$\sqrt{1 - \sin^2(t)} = \cos(t)$$

Példa - helyettesítés trigonometrikus és hyperbolikus függvényekkel

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\cos(t)} \cos(t) dt = \int 1 dt = t + c = \arcsin(x) + c$$

$$x = \sin(t) \rightsquigarrow t = \arcsin(x), \quad \frac{dx}{dt} = \cos(t) \rightsquigarrow dx = \cos(t) dt,$$

$$\sqrt{1 - \sin^2(t)} = \cos(t)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

Példa - helyettesítés trigonometrikus és hyperbolikus függvényekkel

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\cos(t)} \cos(t) dt = \int 1 dt = t + c = \arcsin(x) + c$$

$$x = \sin(t) \rightsquigarrow t = \arcsin(x), \quad \frac{dx}{dt} = \cos(t) \rightsquigarrow dx = \cos(t) dt,$$

$$\sqrt{1 - \sin^2(t)} = \cos(t)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} \operatorname{ch}(t) dt = \int 1 dt = t + c = \operatorname{arsh}(x) + c$$

$$x = \operatorname{sh}(t), \quad \frac{dx}{dt} = \operatorname{ch}(t) \rightsquigarrow dx = \operatorname{ch}(t) dt \quad \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2(t)} = \operatorname{ch}(t)$$

Ezeket a deriváltak táblázatából is ismerjük...

Példa - helyettesítés trigonometrikus és hyperbolikus függvényekkel

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}} dx$$

Példa - helyettesítés trigonometrikus és hyperbolikus függvényekkel

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2 + 3}} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}} dx =\end{aligned}$$

$$\frac{x+1}{\sqrt{3}} = \operatorname{sh}(t) \rightsquigarrow x = \sqrt{3} \operatorname{sh}(t) - 1, \quad \frac{dx}{dt} = \sqrt{3} \operatorname{ch}(t) \rightsquigarrow dx = \sqrt{3} \operatorname{ch}(t) dt,$$

$$\text{mivel } \sqrt{\operatorname{sh}^2(t) + 1} = \operatorname{ch}(t),$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} \sqrt{3} \operatorname{ch}(t) dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \sqrt{3} dt = t + c =$$

$$\text{visszaírva } t = \operatorname{arsh}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \operatorname{arsh}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + c.$$

(egyszerű helyettesítéssel is ment volna)