

Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2025. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia

belus@math.bme.hu

geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

20. előadás:
Integrálszámítás alkalmazásai:
terület, síkgörbe ívhossza,
forgástest térfogata, felszíne

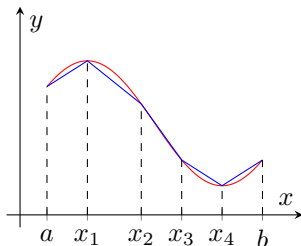
Függvénygrafikon ívhossza

Adott egy $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény, a grafikonjának az ívhosszát szeretnénk meghatározni.

Felosztjuk az intervallumot:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

és az osztópontok feletti grafikonpontokat $(x_i, f(x_i))$ összekötő töröttvonal hosszával közelíthetjük az ívhosszat.



Az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumhoz tartozó szakasz meredeksége megegyezik egy belső $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ pontbeli derivált értékével (Lagrange-tétel).

Ha az intervallum hossza Δ_i , akkor a függvény emelkedése $f'(\xi_i)\Delta_i$, és ekkor a szakasz hossza:

$$\sqrt{(\Delta_i)^2 + (f'(\xi_i)\Delta_i)^2} = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta_i.$$

Függvénygrafikon ívhossza

Ezek összege közelíti a grafikon ívhosszát

$$\mathcal{I}_{f[a,b]} \approx \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta_i,$$

ha a közelítőösszegeknek van közös határértéke a felosztás finomításakor, akkor ez a határérték

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta_i \rightarrow 0}} = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta_i = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Azaz, ha $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ Riemann-integrálható, akkor

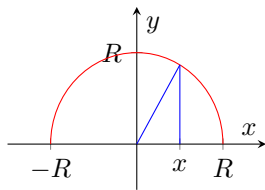
$$\mathcal{I}_{f[a,b]} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Félkör ívhossza

Számítsuk ki az R sugarú félkör ívhosszát, azaz az R sugarú kör kerületének felét ($R\pi$).

Az $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [-R, R]$ függvény pontosan az origó középpontú R sugarú "felső" félkört írja le. Ekkor

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{R^2 - x^2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

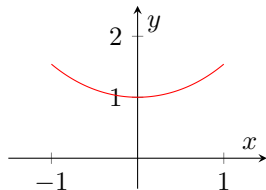


Így az ívhossz:

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \int_{-R}^R \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2} dx = \int_{-R}^R \sqrt{\frac{R^2 - x^2}{R^2 - x^2} + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = \\ &= \int_{-R}^R \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}} dx = \int_{-R}^R \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}} dx = \int_{-R}^R \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}} dx = \\ &= \left[R \arcsin\left(\frac{x}{R}\right) \right]_{-R}^R = R \arcsin(1) - R \arcsin(-1) = R \frac{\pi}{2} - R \left(-\frac{\pi}{2}\right) = R\pi.\end{aligned}$$

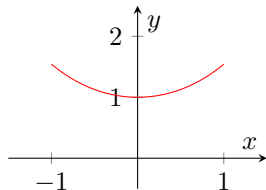
Láncgörbe ívhossza

Számítsuk ki az $f(x) = \operatorname{ch}(x)$, $x \in [-1, 1]$ láncgörbe darabjának ívhosszát!



Láncgörbe ívhossza

Számítsuk ki az $f(x) = \operatorname{ch}(x)$, $x \in [-1, 1]$ láncgörbe darabjának ívhosszát!



$f'(x) = \operatorname{sh}(x)$, és így az ívhossz:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2(x)} \, dx &= \int_{-1}^1 \operatorname{ch}(x) \, dx = \left[\operatorname{sh}(x) \right]_{-1}^1 = \\ &= \operatorname{sh}(1) - \operatorname{sh}(-1) = 2\operatorname{sh}(1) = 2 \frac{e - e^{-1}}{2} = e - \frac{1}{e}.\end{aligned}$$

Forgástestek

Adott egy folytonos $f(x)$ függvény, mely csak nemnegatív értékeket vesz fel az $[a, b]$ intervallumon.

Ennek grafikonját az x tengely körül megforgatjuk (térben).

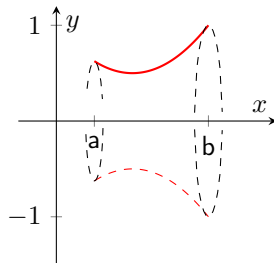
Így egy forgásfelületet kapunk.

Példák:

$f(x) = c$ ekkor egy hengert kapunk

$f(x) = ax$ ekkor egy kúpot vagy csonkakúpot kapunk

$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ egy gömb



Forgástestek térfogata

Felosztjuk az intervallumot:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

és az osztópontok feletti $[x_{i-1}, x_i]$, Δ_i hosszú intervallumhoz tartozó forgástest darabka térfogatát közelítjük.

Egy közbülső, $f(\xi_i)$ sugarú, Δ_i magasságú henger térfogatával közelítjük, azaz

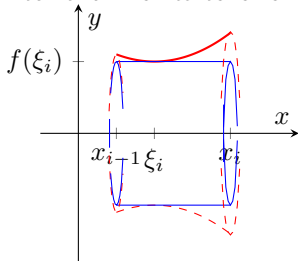
$$V_i = f^2(\xi_i)\pi\Delta_i$$

Ezek összege:

$$\sum_{i=1}^n f^2(\xi_i)\pi\Delta_i.$$

Az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény grafikonjának x tengely körül való forgatásával kapott forgástest térfogata a közelítőösszegek határértékeként

$$\pi \int_a^b f^2(x) \, dx.$$



Gömb térfogata

$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ félkörív körbeforgatásával kapott gömb:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2}^2 \, dx = \pi \int_{-R}^R R^2 - x^2 \, dx = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^R = \\ &= \pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} - \left(-R^3 - \frac{(-R)^3}{3} \right) \right) = \frac{4\pi}{3} R^3 \end{aligned}$$

Forgástestek felszíne

Adott egy folytonos $f(x)$ függvény, mely csak nemnegatív értékeket vesz fel az $[a, b]$ intervallumon.

Ennek grafikonját az x tengely körül megforgatjuk (térben). Így egy forgásfelületet kapunk.

A forgástest palástjának felszínét számoljuk, az alapkörök területét nem.

Az $[a, b]$ intervallum felosztásával, egy Δ_i hosszúságú intervallumhoz tartozó forgástest darabka felszínét egy közbülső, kb. $f(\xi_i)$ sugarú, Δ_i magasságú csonkakúp palástfelszínével közelítjük. Azaz

$$F_i = 2\pi f(\xi_i) \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta_i.$$

Ezek összege:

$$\sum_{i=1}^n 2\pi f(\xi_i) \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta_i.$$

Így az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény grafikonjának x tengely körül való forgatásával kapott forgástest felszíne:

$$2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$$

Példa:

$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ félkörív körbeforgatásával kapott gömb:

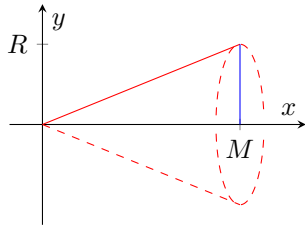
$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} \, dx = 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2 + x^2} \, dx = \\ &= 2\pi \int_{-R}^R R \, dx = 2\pi [Rx]_{-R}^R = 2\pi (R^2 - (-R^2)) = 4\pi R^2. \end{aligned}$$

Kúp térfogata

Az R sugarú körlap alapú, M magasságú kúpot az alábbi függvény megforgatásával kapjuk meg:

$$f(x) = \frac{R}{M}x \quad x \in [0, M]$$

Ennek térfogata:



$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^M \left(\frac{R}{M}x \right)^2 dx = \pi \frac{R^2}{M^2} \int_0^M x^2 dx = \pi \frac{R^2}{M^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^M = \\ &= \pi \frac{R^2}{M^2} \frac{M^3}{3} = \frac{R^2 M \pi}{3}. \end{aligned}$$

Kúp felszíne

A függvény deriváltja: $f'(x) = \frac{R}{M}$, és ezzel a felszíne:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^M \frac{R}{M} x \sqrt{1 + \left(\frac{R}{M}\right)^2} dx = 2\pi \frac{R}{M} \sqrt{\frac{M^2 + R^2}{M^2}} \int_0^M x dx = \\ &= 2\pi \frac{R}{M} \frac{\sqrt{M^2 + R^2}}{M} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^M = 2\pi \frac{R\sqrt{M^2 + R^2}}{M^2} \frac{M^2}{2} = \pi R \sqrt{M^2 + R^2}. \end{aligned}$$

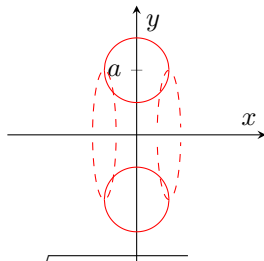
Forgástest felszíne helyettesítéses integrállal

Tórusz: r sugarú $(0, a)$ középpontú kör megforgatása az x -tengely körül.

$$f_1(x) = a + \sqrt{r^2 - x^2} - \text{felső félkör}$$

$$f_2(x) = a - \sqrt{r^2 - x^2} - \text{alsó félkör}$$

$$(f'_{1,2}(x))^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}.$$



$$\mathcal{F} = \int_{-r}^r 2\pi f_1(x) \sqrt{1 + (f'_1(x))^2} dx + \int_{-r}^r 2\pi f_2(x) \sqrt{1 + (f'_2(x))^2} dx =$$

$$2\pi(2a) \int_{-r}^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = 4\pi a \int_{-r}^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} dx = 4\pi a \int_{-r}^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx$$

$$4\pi a \int_{-r}^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx =$$

Helyettesítve $x = r \cos(t)$, $\sqrt{r^2 - x^2} = r \sin(t)$, $\frac{dx}{dt} = -r \sin(t)$,

Ha $x = r \rightsquigarrow t_1 = 0$, és ha $x = -r, \rightsquigarrow t_2 = \pi$

$$\begin{aligned} -4\pi a \int_0^\pi \frac{r}{r \sin(t)} - r \sin(t) dt &= 4\pi a \int_0^\pi r dt = 4\pi a \left[r \cdot t \right]_0^\pi = \\ &= 4\pi ar(\pi - 0) = 4\pi^2 ar. \end{aligned}$$