

Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2025. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia

belus@math.bme.hu

geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

21. előadás:
Határozott integrálok kiszámítása
Numerikus integrálás

Határozott integrál kiszámítása parciális integrálással

$$\int_a^b f(x)g'(x) \, dx = \left[f(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) \, dx$$

Példa:

$$\int_1^e x \ln x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \frac{x^2}{2} \, dx = \frac{e^2}{2} - 0 - \int_1^e \frac{x}{2} \, dx =$$

$$f(x) = \ln x \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = x \quad g(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$= \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} x \cos(2x) \, dx = \left[x \frac{\sin(2x)}{2} \right]_{\pi/4}^{\pi/2} - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin(2x)}{2} \, dx =$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x & f'(x) &= 1 \\ g'(x) &= \cos(2x) & g(x) &= \frac{\sin(2x)}{2} \end{aligned}$$

$$= 0 - \frac{\pi}{8} - \left[-\frac{\cos(2x)}{4} \right]_{\pi/4}^{\pi/2} = -\frac{\pi}{8} - \left(-\frac{1}{4} - 0 \right) = -\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$$

Határozott integrál kiszámítása helyettesítéses integrálással

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{t_a}^{t_b} f(x(t)) x'(t) \, dt,$$

ahol $x = x(t)$ monoton függvény és $x(t_a) = a$, $x(t_b) = b$.

Példa:

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 1} \, dx$$

Ha $t = e^x \Rightarrow x(t) = \ln t$, melynek deriváltja: $x'(t) = \frac{1}{t}$.

Határok: ha $x = 0$, akkor $t_0 = e^0 = 1$, ha $x = 1$, akkor $t_1 = e^1 = e$.

$$= \int_1^e \frac{t}{t^2 + 1} \frac{1}{t} \, dt = \int_1^e \frac{1}{t^2 + 1} \, dt = \left[\arctg(t) \right]_1^e = \arctg(e) - \frac{\pi}{4}.$$

Feladat

$$\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x}) \, dx =$$

Ha $t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2$, ha $t > 0$, és $\frac{dx}{dt} = 2t$.

Határook: $x = \pi^2 \rightsquigarrow t = \pi$ $x = 0 \rightsquigarrow t = 0$

$$= \int_0^{\pi} \sin(t) \cdot 2t \, dt = 2 \int_0^{\pi} t \sin(t) \, dt =$$

$$f(t) = t, \quad g'(t) = \sin(t) \longrightarrow f'(t) = 1, \quad g(t) = -\cos(t)$$

$$= 2 \left(\left[-t \cos(t) \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos(t) \, dt \right) = 2 \left(-\pi \cdot (-1) + \left[\sin(t) \right]_0^{\pi} \right) = 2\pi.$$

Határozott integrál kiszámítása parciális törtekre bontással

$$\int_2^3 \frac{x^4 + 1}{x^2(x-1)} dx = \int_2^3 (x+1) + \frac{x^2+1}{x^2(x-1)} dx = \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_2^3 + \\ + \int_2^3 \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{(x-1)} dx =$$

$$\frac{x^2+1}{x^2(x-1)} = \frac{Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2}{x^2(x-1)} = \frac{Ax^2 - Ax + Bx - B + Cx^2}{x^2(x-1)}$$

$$A + C = 1, \quad B - A = 0, \quad -B = 1 \quad \Rightarrow \quad A = -1, B = -1, C = 2.$$

$$= \left(\frac{15}{2} - 4 \right) + \int_2^3 \frac{-1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{2}{(x-1)} dx = \frac{7}{2} + \left[-\ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x-1| \right]_2^3 =$$

$$\frac{7}{2} - \ln(3) + \ln(2) + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\ln(2) - 2\ln(1) = \frac{10}{3} - \ln(3) + 3\ln(2).$$

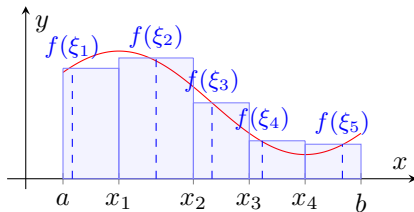
Integrálközelítő módszerek

Adott egy $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény, melynek nem ismerjük a primitív függvényét. A határozott integrál definíciójában használt közelítőösszegek segítségével becsülhetjük az integrál értékét.

Téglalap-módszer. Felosztjuk az integrálási intervallumot

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

és az osztópontok között $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ -ben vett függvényértéket $f(\xi_i)$ -t vesszük magasságként.



$$\int_a^b f(x) \, dx \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i = S_n.$$

Téglalap-módszer

A közelítő módszerekben általában feltesszük, hogy a felosztás egyenletes (ekvidisztáns), azaz

$$\Delta_i = \frac{b-a}{n}, \quad \text{és} \quad x_i = a + (i-1) \frac{b-a}{n}, \quad i = 1, \dots, n.$$

A ξ_i helyek választása szerinti különböző módszerek:

- ha $\xi_i = x_{i-1}$, bal végpontos módszer

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}),$$

- ha $\xi_i = x_i$, jobb végpontos módszer,
- ha $\xi_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$, középpontos módszer.

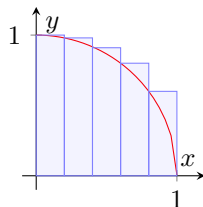
Példa

Számítsuk ki az 1 sugarú negyedkör alatti területet ($\pi/4 \approx 0,7854$) közelítve.

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [0, 1].$$

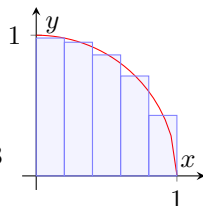
Bal végpontos módszerrel, $n = 5$ -re

$$\begin{aligned} & \frac{1}{5} (f(0) + f(0.2) + f(0.4) + f(0.6) + f(0.8)) = \\ &= \frac{1}{5} (1 + 0,979 + 0,916 + 0,8 + 0,6) = 0,859 \end{aligned}$$



Középpontos módszerrel, $n = 5$ -re

$$\begin{aligned} & \frac{1}{5} (f(0.1) + f(0.3) + f(0.5) + f(0.7) + f(0.9)) = \\ &= \frac{1}{5} (0,995 + 0,954 + 0,866 + 0,714 + 0,436) = 0,793 \end{aligned}$$

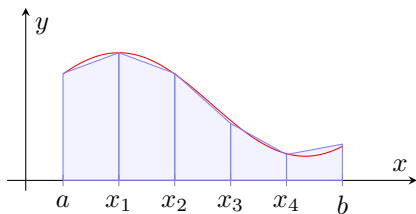


Trapéz-módszer

Felosztjuk az integrálási intervallumot n egyenlő darabra (ekvidisztáns), azaz

$$\Delta_i = \frac{b-a}{n}, \text{ és } x_i = a + (i-1) \frac{b-a}{n}, i = 1, \dots, n.$$

Az $(x_i, 0)$, $(x_{i-1}, 0)$, $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ és $(x_i, f(x_i))$ pontok által kifeszített derékszögű trapézok területével közelítjük a függvény alatti területet.



$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} = \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{f(b)}{2} \right).$$

Példa

Számítsuk ki az 1 sugarú negyedkör alatti területet ($\pi/4 \approx 0,7854$)közelítve.

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [0, 1].$$

Ha $n = 5$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{5} \left(\frac{f(0)}{2} + f(0.2) + f(0.4) + f(0.6) + f(0.8) + \frac{f(1)}{2} \right) = \\ & = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} + 0,979 + 0,916 + 0,8 + 0,6 + \frac{0}{2} \right) = 0,759 \end{aligned}$$

