# Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2024. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

# 1. előd́ás:
# A halmazelmélet alapjai, egyenletek és egyenlőtlenségek, matematikai állítások szerkezete és bizonyítási módszerek

# Halmazok – bevezető feladat

**Példa**: Egy toronyba $99$ lépcsőfok vezet fel. András és Bea közösen indulnak felfelé, de András csak minden harmadik, Bea minden második lépcsőre lép. Mely lépcsőfokokra lépnek rá mindketten? Hány lépcsőfokra nem lépett rá egyikük sem?

# Halmazok – bevezető feladat

**Példa**: Egy toronyba $99$ lépcsőfok vezet fel. András és Bea közösen indulnak felfelé, de András csak minden harmadik, Bea minden második lépcsőre lép. Mely lépcsőfokokra lépnek rá mindketten? Hány lépcsőfokra nem lépett rá egyikük sem?

**Megoldás**:

- András rálép a $3, 6, 9, \ldots, 96$ és $99$-edik lépcsőre,
- Bea rálép a $2, 4, 6, \ldots, 96$ és $98$-adik lépcsőre.

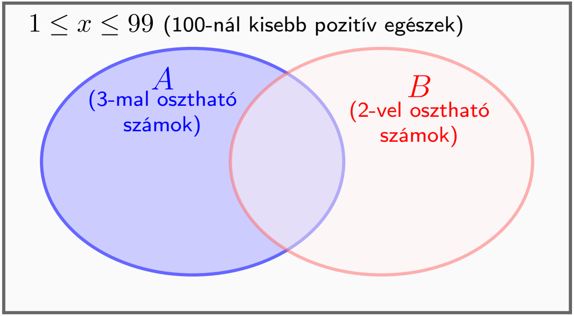
# Halmazok – bevezető feladat

**Példa**: Egy toronyba $99$ lépcsőfok vezet fel. András és Bea közösen indulnak felfelé, de András csak minden harmadik, Bea minden második lépcsőre lép. Mely lépcsőfokokra lépnek rá mindketten? Hány lépcsőfokra nem lépett rá egyikük sem?

**Megoldás**:

- András rálép a $3, 6, 9, \ldots, 96$ és $99$-edik lépcsőre,
- Bea rálép a $2, 4, 6, \ldots, 96$ és $98$-adik lépcsőre.

Ábrázoljuk halmazokkal:



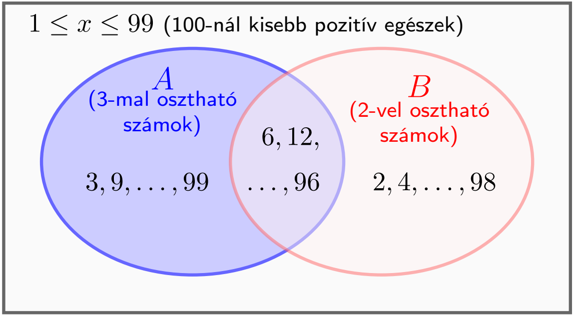
# Halmazok – bevezető feladat

**Példa**: Egy toronyba $99$ lépcsőfok vezet fel. András és Bea közösen indulnak felfelé, de András csak minden harmadik, Bea minden második lépcsőre lép. Mely lépcsőfokokra lépnek rá mindketten? Hány lépcsőfokra nem lépett rá egyikük sem?

**Megoldás**:

- András rálép a $3, 6, 9, \ldots, 96$ és $99$-edik lépcsőre,
- Bea rálép a $2, 4, 6, \ldots, 96$ és $98$-adik lépcsőre.

Ábrázoljuk halmazokkal:




Közösen lépnek rá a $6$-tal osztható számú lécsőkre: $6, 12, 18, \ldots, 96$.

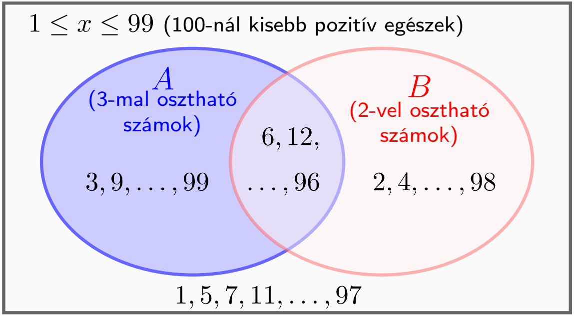
# Halmazok – bevezető feladat

**Példa**: Egy toronyba $99$ lépcsőfok vezet fel. András és Bea közösen indulnak felfelé, de András csak minden harmadik, Bea minden második lépcsőre lép. Mely lépcsőfokokra lépnek rá mindketten? Hány lépcsőfokra nem lépett rá egyikük sem?

**Megoldás**:

- András rálép a $3, 6, 9, \ldots, 96$ és $99$-edik lépcsőre,
- Bea rálép a $2, 4, 6, \ldots, 96$ és $98$-adik lépcsőre.

Ábrázoljuk halmazokkal:




Közösen lépnek rá a 6-tal osztható számú lécsőkre: $6, 12, 18, \ldots, 96$.

Nem lépnek rá a $1, 5, 7, 11, \ldots, 97$ lépcsőkre, ilyenből $99 - 33 - 49 + 16 = 33$ darab van.

# Halmazok

**Alapfogalom(Axióma)**: olyan alapfeltevés, melyet bizonyítás nélkül fogadunk el. A **"halmaz"** és **"halmazhoz tartozás"** alapfogalmak.

> " Meghatározott és jól megkülönböztethető dolgok összesége. "
>
> Cantor (1895)

Egy halmaz akkor adott, ha minden objektumról eldönthető, hogy hozzá tartozik-e, továbbá ha bármely két elemről eldönthető, hogy azonosak-e.

Jelölés:

halmazok: $A, B...$ nagybetűk
elemek: $a, b...$ kisbetűk
$a \in A$ eleme, $b \notin A$ nem eleme

Megadás:

- Az elemek **felsorolás**ával: $A = \{3, 6, 9, \ldots, 99\}$.
- Rögzítsünk egy **alaphalmazt**, amely tartalmazza az összes vizsgálható objektumot, és adjunk meg egy minden elemre egyértelműen eldönthető logikai tulajdonságot:

$$A = \{a \text{ szám} \mid 1 \leq a \leq 99 \text{ egész és osztható 3-mal}\} = \{3, 6, 9, ..., 99\}.$$

# Halmazok

## Tartalmazás (relációk)

- Az $A$ halmaz **részhalmaza** a $B$ halmaznak (jel: $A \subseteq B$), ha $A$ minden eleme egyúttal eleme $B$-nek is.
- Az $A$ halmaz **valódi(szigorú) részhalmaza** a $B$ halmaznak (jel: $A \subset B$), ha $A$ minden eleme eleme $B$-nek is, de van olyan $B$-beli elem, amely nem eleme $A$-nak.
- Az $A$ és $B$ **halmazok egyenlők**, ha $A$ részhalmaza $B$-nek és $B$ is részhalmaza $A$-nak (azaz, pontosan ugyanazok az elemeik).
- Az **üres halmaz** az a halmaz (jel: $\emptyset$ vagy $\{\,\}$), amelynek egyetlen szóba jöhető objektum sem eleme.
- $A$ és $B$ **diszjunkt**, ha nincs közös elemük.

# Halmazok

## Műveletek

- $A$ és $B$ halmazok **uniója** azon $A \cup B$ halmaz, amelynek minden eleme az $A$ és $B$ halmazok közül legalább az egyikben benne van.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\}.$$

- $A$ és $B$ halmazok **metszete** azon $A \cap B$ halmaz, amelynek minden eleme az $A$ és $B$ halmazoknak is eleme.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \in B\}.$$

- $A$ halmaz és $B$ halmaz ebben a sorrendben vett **különbsége** azon $A \setminus B$ halmaz, amely tartalmazza $A$ halmaznak minden olyan elemét, amely $B$ halmazban nincs benne.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \notin B\}.$$

- Ha $H$ az alaphalmaz, akkor $\overline{A} = H \setminus A$ lesz a **komplementer** halmaza.
- Az $A$ és a $B$ halmazok **Descartes-szorzata** olyan rendezett elempárok halmaza, melyek első eleme $A$-ból, második eleme $B$-ből való:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

# Halmazok - Példa

Legyen $A = \{1,2\}$ és $B = \{2,3,4\}$ és $H = \{0,1,2,3,4,5\}$ az alaphalmaz.

Mi lesz $A \cup B$, $\overline{A \cup B}$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \times B$, $B \times A$ és $(A \times B) \setminus (B \times A)$?

# Halmazok - Példa

Legyen $A = \{1, 2\}$ és $B = \{2, 3, 4\}$ és $H = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ az alaphalmaz.

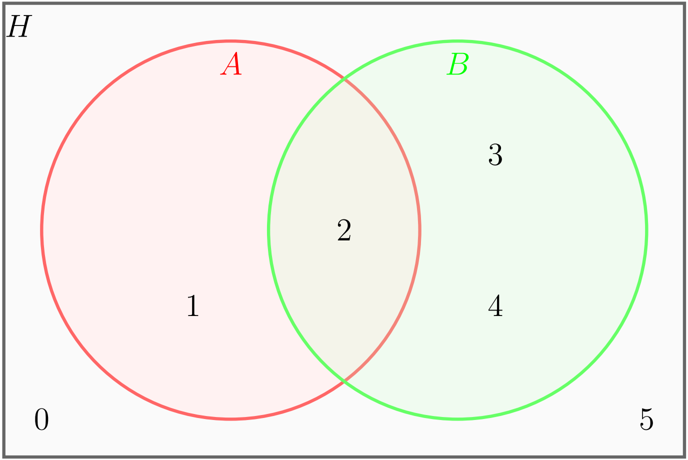
Mi lesz $A \cup B$, $\overline{A \cup B}$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \times B$, $B \times A$ és $(A \times B) \setminus (B \times A)$?

$$
\begin{aligned}
A \cup B &= \{1, 2, 3, 4\}, \\
\overline{A \cup B} &= \{0, 5\}, \\
A \cap B &= \{2\}, \\
A \setminus B &= \{1\}, \\
A \times B &= \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (1, 4), (2, 4)\} \\
B \times A &= \{(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)\} \\
(A \times B) \setminus (B \times A) &= \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (1, 4), (2, 4)\}.
\end{aligned}
$$

# Halmazok - Példa

Legyen $A = \{1, 2\}$ és $B = \{2, 3, 4\}$ és $H = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ az alaphalmaz.

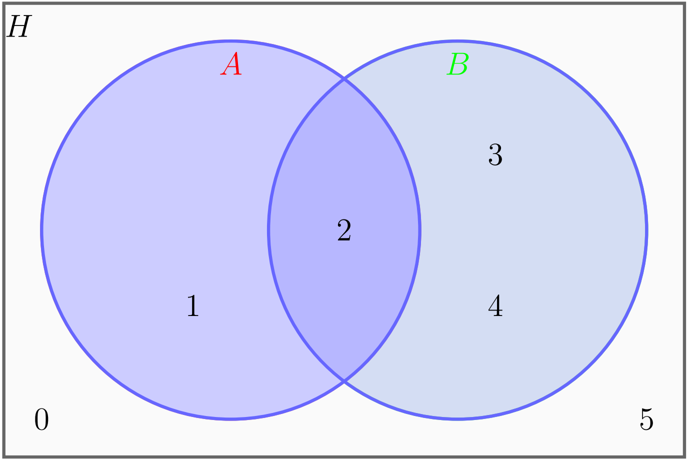
Ábrázoljuk Venn-diagrammal $A \cup B$, $\overline{A \cup B}$, $A \cap B$ és $A \setminus B$ halmazokat!



# Halmazok - Példa

Legyen $A = \{1, 2\}$ és $B = \{2, 3, 4\}$ és $H = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ az alaphalmaz.

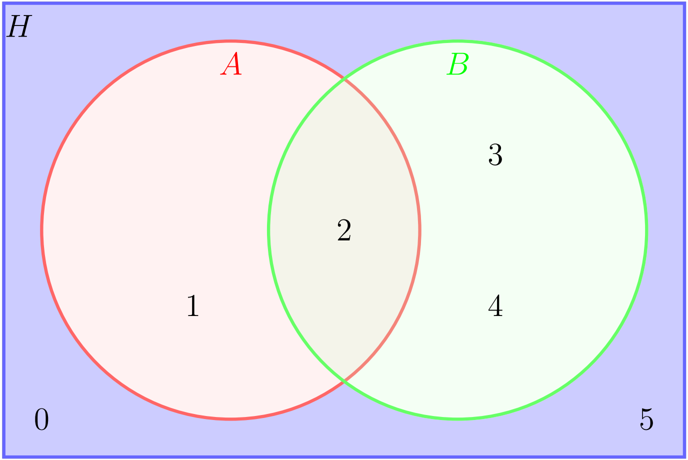
Ábrázoljuk Venn-diagrammal $A \cup B$, $\overline{A \cup B}$, $A \cap B$ és $A \setminus B$ halmazokat!



# Halmazok - Példa

Legyen $A = \{1, 2\}$ és $B = \{2, 3, 4\}$ és $H = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ az alaphalmaz.

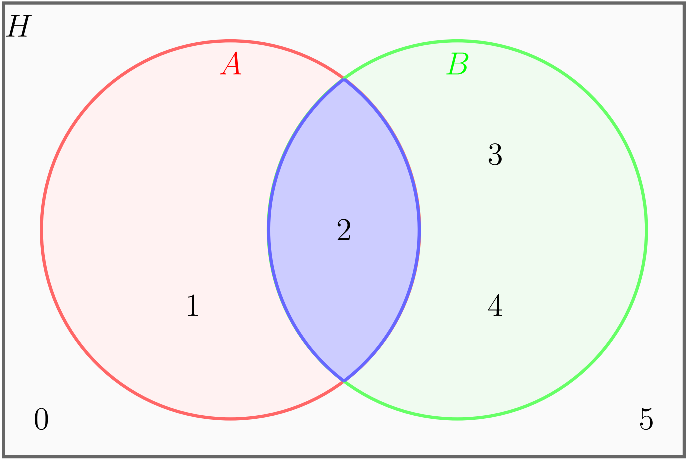
Ábrázoljuk Venn-diagrammal $A \cup B$, $\overline{A \cup B}$, $A \cap B$ és $A \setminus B$ halmazokat!



# Halmazok - Példa

Legyen $A = \{1, 2\}$ és $B = \{2, 3, 4\}$ és $H = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ az alaphalmaz.

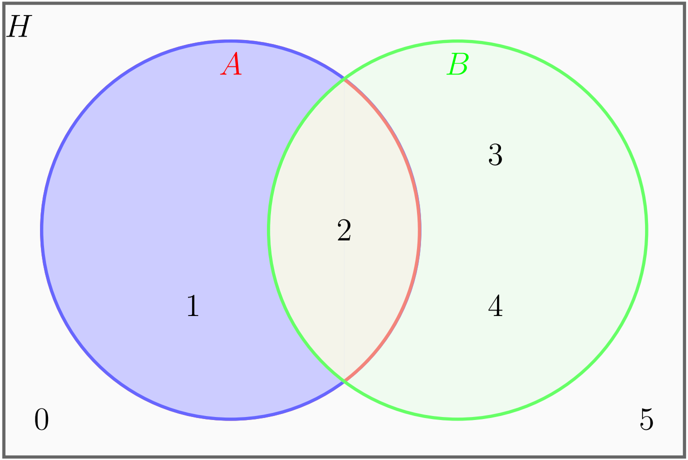
Ábrázoljuk Venn-diagrammal $A \cup B$, $\overline{A \cup B}$, $A \cap B$ és $A \setminus B$ halmazokat!



# Halmazok - Példa

Legyen $A = \{1, 2\}$ és $B = \{2, 3, 4\}$ és $H = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ az alaphalmaz.

Ábrázoljuk Venn-diagrammal $A \cup B$, $\overline{A \cup B}$, $A \cap B$ és $A \setminus B$ halmazokat!



# Halmazok

## Nevezetes számhalmazok:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \ldots\}$ – természetes számok $\quad$ (0 is benne van!)

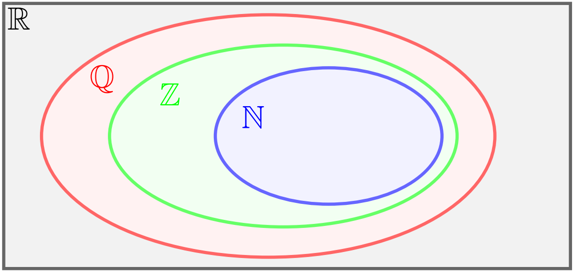
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2 \ldots\}$ – egész számok,

$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2 \ldots\}$ – pozitív egész számok,

$\mathbb{Q} = \{p/q \,|\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ – racionális számok,

$\mathbb{R}$: teljes számegyenes – valós számok

## Számhalmazok Venn-diagrammja:



# Halmazok

## Nevezetes számhalmazok:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \ldots\}$ – természetes számok $\quad$ (0 is benne van!)

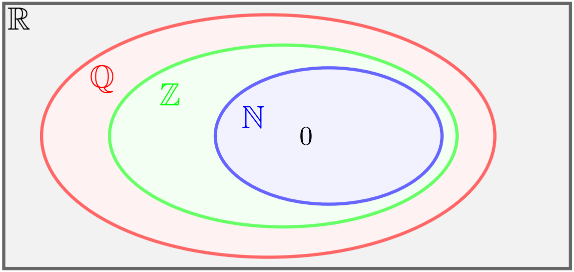
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2 \ldots\}$ – egész számok,

$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2 \ldots\}$ – pozitív egész számok,

$\mathbb{Q} = \{p/q \,|\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ – racionális számok,

$\mathbb{R}$: teljes számegyenes – valós számok

## Számhalmazok Venn-diagrammja:



# Halmazok

## Nevezetes számhalmazok:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2\ldots\}$ – természetes számok (0 is benne van!)

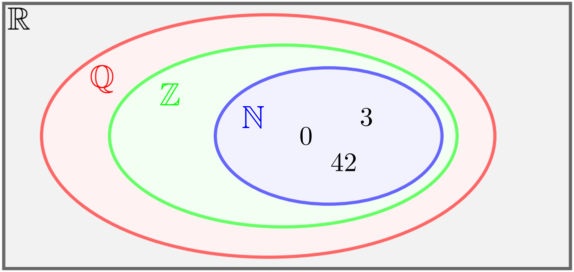
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2\ldots\}$ – egész számok,

$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2\ldots\}$ – pozitív egész számok,

$\mathbb{Q} = \{p/q \,|\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ – racionális számok,

$\mathbb{R}$: teljes számegyenes – valós számok

## Számhalmazok Venn-diagrammja:



# Halmazok

## Nevezetes számhalmazok:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \ldots\}$ – természetes számok  (0 is benne van!)

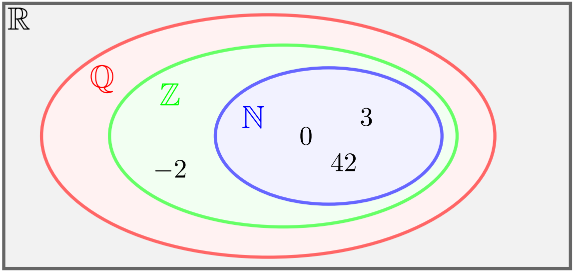
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2 \ldots\}$ – egész számok,

$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2 \ldots\}$ – pozitív egész számok,

$\mathbb{Q} = \{p/q \,|\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ – racionális számok,

$\mathbb{R}$: teljes számegyenes – valós számok

## Számhalmazok Venn-diagrammja:



# Halmazok

## Nevezetes számhalmazok:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \ldots\}$ – természetes számok $\quad$ ($0$ is benne van!)

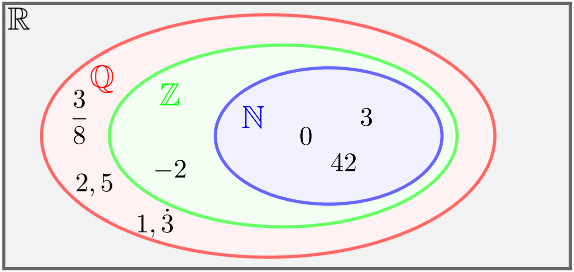
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2 \ldots\}$ – egész számok,

$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2 \ldots\}$ – pozitív egész számok,

$\mathbb{Q} = \{p/q \,|\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ – racionális számok,

$\mathbb{R}$: teljes számegyenes – valós számok

## Számhalmazok Venn-diagrammja:



# Halmazok

## Nevezetes számhalmazok:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \ldots\}$ – természetes számok $\quad$ (0 is benne van!)

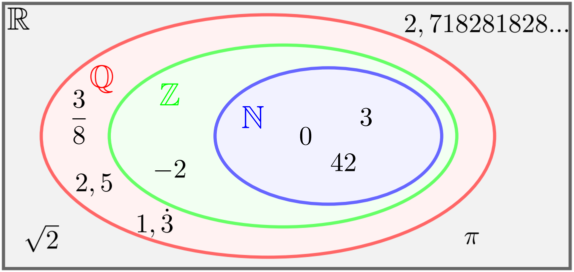
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2 \ldots\}$ – egész számok,

$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2 \ldots\}$ – pozitív egész számok,

$\mathbb{Q} = \{p/q \,|\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ – racionális számok,

$\mathbb{R}$: teljes számegyenes – valós számok

## Számhalmazok Venn-diagrammja:

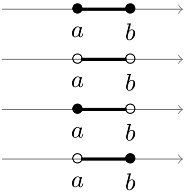


# Intervallumok (a számegyenes szakaszai, mint számhalmazok)

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$ **zárt** intervallum

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ **nyílt** intervallum

$\left.\begin{array}{l} [a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\} \\ (a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\} \end{array}\right\}$ félig nyílt/zárt




Egy $[?(a,b)?]$ **intervallum hossza** a végpontok távolsága $d(a,b) := |b-a|$.

Ha $a$ és/vagy $b = \pm\infty$ , akkor ott csak nyílt lehet az intervallum:

$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ nyílt intervallum

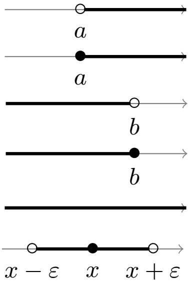
$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\}$ zárt intervallum

$(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ nyílt intervallum

$(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$ zárt intervallum

$(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$ valós számok

$x$ valós szám $\varepsilon > 0$ sugarú környezete: $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$



# Egy gyökös egyenlet megoldása

Egy $x$ ismeretlenre felírt egyenlet megoldása azt jelenti, hogy keressük az alaphalmaz azon $x$ elemeit, melyekre az egyenletet teljesül.

Példa. Oldjuk meg az $x+1=\sqrt{7+x}$ egyenletet a valós számok halmazán!

# Egy gyökös egyenlet megoldása

Egy $x$ ismeretlenre felírt egyenlet megoldása azt jelenti, hogy keressük az alaphalmaz azon $x$ elemeit, melyekre az egyenletet teljesül.

Példa. Oldjuk meg az $x+1=\sqrt{7+x}$ egyenletet a valós számok halmazán!

$$\begin{aligned}
x+1 &= \sqrt{7+x} \quad (x \geq -7) \\
&\Downarrow \quad \text{négyzetre emelés} \\
(x+1)^2 &= 7+x \\
&\Updownarrow \quad \text{kifejtés} \\
x^2+2x+1 &= 7+x \\
&\Updownarrow \quad \text{átrendezés} \\
x^2+x-6 &= 0
\end{aligned}$$

Másodfokú megoldóképlet: $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4\cdot(-6)}}{2} = \dfrac{-1\pm 5}{2} = 2, -3.$

Visszahelyettesítve $x_1 = 2$ megoldás: $2+1=3=\sqrt{7+2}$,

míg $x_2=-3$ nem megoldás, $-3+1=-2$, de $\sqrt{7-3}=2$ (hamis gyök!).

# Egy egyenlőtlenség megoldása

Egy $x$ ismeretlenre felírt egyenlőtlenség megoldása azt jelenti, hogy keressük az alap számhalmaz azon részeit (rendszerint intervallumokat vagy azok unióját), melyekre az egyenlőtlenség teljesül.

Példa. Oldjuk meg a $|2x+3| \geq 5$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

# Egy egyenlőtlenség megoldása

Egy $x$ ismeretlenre felírt egyenlőtlenség megoldása azt jelenti, hogy keressük az alap számhalmaz azon részeit (rendszerint intervallumokat vagy azok unióját), melyekre az egyenlőtlenség teljesül.

Példa. Oldjuk meg a $|2x+3| \geq 5$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

A $|2x+3| \geq 5$ egyenlőtlenség pontosan azt jelenti, hogy

$$\begin{array}{ccc} 2x+3 \leq -5 & \text{vagy} & 2x+3 \geq 5 \\ 2x \leq -8 & & 2x \geq 2 \\ x \leq -4 & & x \geq 1 \end{array}$$

Tehát a megoldáshalmaz a $(-\infty, -4] \cup [1, \infty)$ intervallumok uniója.

## Állítások szerkezete

Alap kijelentésekből képzünk állításokat a "nem", "és", "vagy", "ha. . . akkor", "akkor és csak akkor" logikai kapcsolatok segítségével.

Fontos jelölések:

| | | |
|---|---|---|
| $\forall$ | - | minden |
| $\exists$ / $\nexists$ | - | létezik/nem létezik |
| $\neg$ | - | nem |
| $\wedge$ / $\vee$ | - | és/vagy |
| $A \Longrightarrow B$ | - | ha $A$, akkor $B$ |
| $A \Longleftrightarrow B$ | - | $A$ akkor és csak akkor $B$ |
| $:=$ | - | definiáló egyenlőség (a bal oldalt a jobb oldallal egyenlőként értelmezzük) |

Példa. Halmazok különbségének definíciója logikai jelekkel leírva:

$$x \in A \setminus B \Longleftrightarrow (x \in A) \wedge \neg(x \in B)$$

vagy

$$A \setminus B := \{x \in A | \, x \notin B\}$$

# Bizonyítási módszerek

A **direkt** bizonyítási eljárás során a már korábban bizonyított vagy axiómaként elfogadott megállapításokból kiindulva helyes logikai következtetésekkel igazoljuk az állításunkat.

Az **indirekt** bizonyítás olyan eljárás, melynek során feltesszük, hogy állításunk nem igaz, és ebből kiindulva helyes logikai következtetéseket levonva ellentmondáshoz jutunk. Így igazoljuk, hogy a kiindulási feltevés téves volt, azaz a bizonyítandó állítás helyes.

Példa (indirekt bizonyítás).

Állítás: végtelen sok prímszám létezik.

Indirekt feltevés: véges sok prím létezik, pontosan $k$ darab $p_1, p_2, \ldots, p_k$.

Ekkor tekintsük a $q = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k + 1$ számot. Ez nem lehet prím, mert az ellentmondana a feltevésnek. Ekkor viszont létezik osztója, ami nem $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Ez szintén ellentmond a feltevésünknek, hiszen akkor lenne olyan prímosztója is, mely nincs az összes prím között. Így a feltevésünk hamis volt, tehát az eredeti állítás igaz.

# Bizonyítási módszerek

A **teljes indukció** bizonyítási módszerét a természetes számok közül végtelen sokra kimondott állítások igazolására használjuk.

Az érvelésünk menete a következő:

1. Igazoljuk $n = 0$, vagy $1$ stb. esetben (megfelelően kicsi $n$-re) az állítást,
2. tegyük fel, hogy igaz $n = N$ rögzített számra (indukciós feltevés) igaz az állítás,
3. igazoljuk a rákövetkező $n = N + 1$-re is,

így az adott állítást beláttuk minden $n$-re, mely nagyobb vagy egyenlő az 1. pontban igazolt esetnél.

Példa (teljes indukció).

Bizonyítsuk be teljes indukcióval minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra, hogy

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ha $n = 1$

$$1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$$

Tegyük fel $n = N$-re igaz, azaz

$$\sum_{k=1}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2} \qquad \text{(indukciós feltétel).}$$

Vizsgáljuk $n = N + 1$-re

$$\sum_{k=1}^{N+1} k = \sum_{k=1}^{N} k + (N+1) \underset{\text{(ind.felt.)}}{=}$$

$$= \frac{N(N+1)}{2} + (N+1) = \frac{N(N+1) + 2(N+1)}{2} = \frac{(N+1)(N+2)}{2}.$$