Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

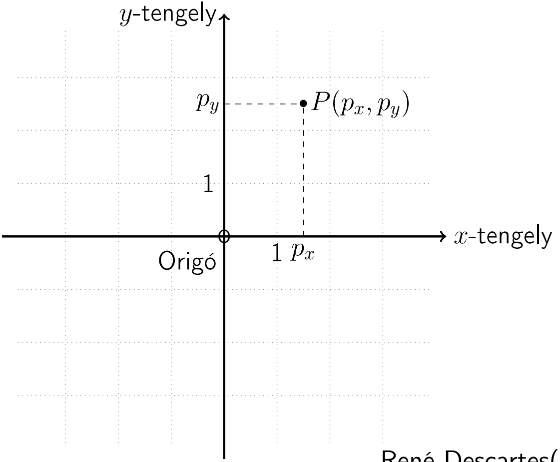
2024. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

2. előadás:
Egyenesek, körök, parabolák függvényábrázolás és függvénytranszformációk

Derékszögű koordináta-rendszer: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Két egymásra merőleges valós számegyenes segítségével, melyek a 0-ban találkoznak (**origó**) a sík pontjait rendezett valós számpároknak feleltejük meg.



René Descartes(1596-1650)

Egyenesek egyenlete

Írjuk fel a $P(p_x, p_y)$ és a $Q(q_x, q_y)$ ponton átmenő egyenes egyenletét! Azaz azt az egyenlet, melynek megoldáshalmazát ábrázolva a koordinátarendszerben pontosan a PQ egyenesén fekvő pontok halmazát kapjuk.

Az egyenes **meredeksége**: $q_y - p_y$ egységet emelkedünk, míg $q_x - p_x$ egységet megyünk jobbra, e kettő hányadosa a meredekség:

$$m = \frac{q_y - p_y}{q_x - p_x}, \quad \text{ha} \quad p_x \neq q_x.$$

Az **egyenes egyenlete** általánosan

$$y - p_y = m(x - p_x),$$

melyet a $P(p_x, p_y)$ és a $Q(q_x, q_y)$ pontok koordinátapárjai is kielégítenek. (P és Q illeszkednek az egyenesre.)

Ha $p_x = q_x$, akkor P és Q, valamint minden egyenesre eső pont első koordinátája azonos, így $x = p_x (= q_x)$ egyenlet írja le a megfelelő függőleges egyenes pontjait.

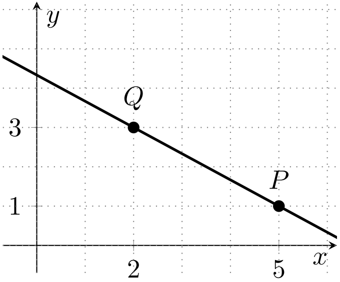
Egyenesek egyenlete

Példa. Írjuk fel a $P(5,1)$ és a $Q(2,3)$ ponton átmenő egyenes egyenletét.

Egyenesek egyenlete

Példa. Írjuk fel a $P(5,1)$ és a $Q(2,3)$ ponton átmenő egyenes egyenletét.

Itt $p_x = 5,\ p_y = 1\,, q_x = 2,\ q_y = 3.$



A meredekség:

$$m = \frac{q_y - p_y}{q_x - p_x} = \frac{3-1}{2-5} = -\frac{2}{3}.$$

Az egyenes egyenlete $y - p_y = m(x - p_x)$, azaz itt:

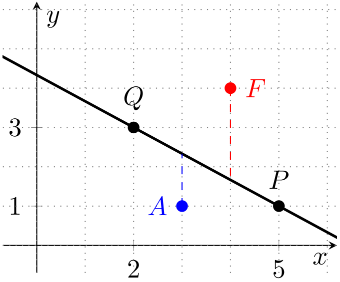
$$y - 1 = -\frac{2}{3}(x-5)$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}.$$

Egyenesek egyenlete

Példa. Írjuk fel a $P(5,1)$ és a $Q(2,3)$ ponton átmenő egyenes egyenletét.

Itt $p_x = 5,\ p_y = 1\,, q_x = 2,\ q_y = 3.$



A meredekség:

$$m = \frac{q_y - p_y}{q_x - p_x} = \frac{3-1}{2-5} = -\frac{2}{3}.$$

Az egyenes egyenlete $y - p_y = m(x - p_x)$, azaz itt:

$$y - 1 = -\frac{2}{3}(x-5)$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}.$$

Hogyan jellemezhetőek az egyenes alatti és feletti pontok?

Egyenes alatti pontok $A(a_x, a_y)$: $a_y < -\frac{2}{3}a_x + \frac{13}{3}.$

Egyenes feletti pontok $F(f_x, f_y)$: $f_y > -\frac{2}{3}f_x + \frac{13}{3}.$

Kör egyenlete

Egy $P(x, y)$ pont távolsága az origótól $\sqrt{x^2 + y^2}$. Így az origó középpontú, r sugarú kör egyenlete:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Kör egyenlete

Egy $P(x, y)$ pont távolsága az origótól $\sqrt{x^2 + y^2}$. Így az origó középpontú, r sugarú kör egyenlete:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Ha (a, b) a kör középpontja, akkor a ponttól mért r távolságra lévő pontok

(x, y) koordinátái az $\quad (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad$ egyenletet elégítik ki.

Kör egyenlete

Egy $P(x, y)$ pont távolsága az origótól $\sqrt{x^2 + y^2}$. Így az origó középpontú, r sugarú kör egyenlete:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Ha (a, b) a kör középpontja, akkor a ponttól mért r távolságra lévő pontok

(x, y) koordinátái az $\quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \quad$ egyenletet elégítik ki.

Példa. Az $(2, -1)$ középpontú, 3 sugarú kör egyenlete:

Kör egyenlete

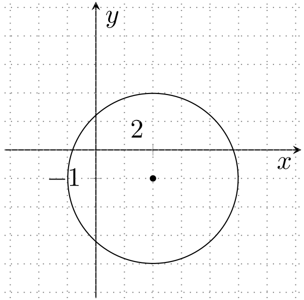
Egy $P(x, y)$ pont távolsága az origótól $\sqrt{x^2 + y^2}$. Így az origó középpontú, r sugarú kör egyenlete:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Ha (a, b) a kör középpontja, akkor a ponttól mért r távolságra lévő pontok (x, y) koordinátái az $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ egyenletet elégítik ki.

Példa. Az $(2, -1)$ középpontú, 3 sugarú kör egyenlete:

$$\begin{aligned}(x-2)^2 + (y+1)^2 &= 3^2\\ x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 &= 9\\ x^2 - 4x + y^2 + 2y - 4 &= 0\end{aligned}$$



Kör egyenlete

Egy $P(x, y)$ pont távolsága az origótól $\sqrt{x^2 + y^2}$. Így az origó középpontú, r sugarú kör egyenlete:

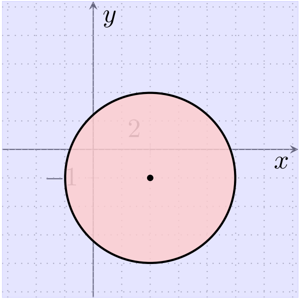
$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Ha (a, b) a kör középpontja, akkor a ponttól mért r távolságra lévő pontok

(x, y) koordinátái az $\quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \quad$ egyenletet elégítik ki.

Példa. Az $(2, -1)$ középpontú, 3 sugarú kör egyenlete:

$$\begin{aligned} (x-2)^2 + (y+1)^2 &= 3^2 \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 &= 9 \\ x^2 - 4x + y^2 + 2y - 4 &= 0 \end{aligned}$$



Ekkor az $x^2 - 4x + y^2 + 2y - 4 < 0$ egyenlőtlenség megoldási a körlap **belső** pontjainak halmaza, $x^2 - 4x + y^2 + 2y - 4 = 0$ a **körvonal** pontjainak halmaza, $x^2 - 4x + y^2 + 2y - 4 > 0$ a **körön kívül eső pontok** halmaza.

Kör egyenlete

Példa. Milyen alakzat az $x^2 - 6x + y^2 - 4y - 3 = 0$ egyenletet kielégítő pontok halmaza?

Kör egyenlete

Példa. Milyen alakzat az $x^2 - 6x + y^2 - 4y - 3 = 0$ egyenletet kielégítő pontok halmaza?

$$x^2 - 6x + y^2 - 4y - 3 = 0$$
$$(x-3)^2 - 9 + (y-2)^2 - 4 - 3 = 0$$
$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$$

Ez egy $(3,2)$ középpontú, 4 sugarú kör.

Kör egyenlete

Példa. Milyen alakzat az $x^2 - 6x + y^2 - 4y - 3 = 0$ egyenletet kielégítő pontok halmaza?

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + y^2 - 4y - 3 &= 0 \\ (x-3)^2 - 9 + (y-2)^2 - 4 - 3 &= 0 \\ (x-3)^2 + (y-2)^2 &= 16 \end{aligned}$$

Ez egy $(3, 2)$ középpontú, 4 sugarú kör.

Hol találhatóak az $x^2 - 6x + y^2 - 4y - 3 \leq 0$ egyenlőtlenséget kielégítő pontok?

Kör egyenlete

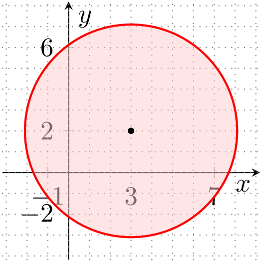
Példa. Milyen alakzat az $x^2 - 6x + y^2 - 4y - 3 = 0$ egyenletet kielégítő pontok halmaza?

$$x^2 - 6x + y^2 - 4y - 3 = 0$$
$$(x-3)^2 - 9 + (y-2)^2 - 4 - 3 = 0$$
$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$$

Ez egy $(3,2)$ középpontú, 4 sugarú kör.

Hol találhatóak az $x^2 - 6x + y^2 - 4y - 3 \leq 0$ egyenlőtlenséget kielégítő pontok?

A $(3,2)$ középpontú, 4 sugarú kör körvonalának és körlapjának pontjai.



Parabolák

A síkon az $y = ax^2 + bx + c$ egyenletet kielégítő pontok mértani helyét **parabolának** nevezzük.

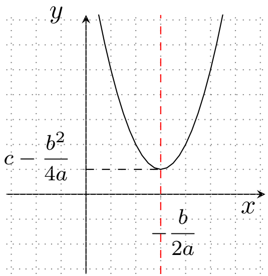
A fenti egyenlettel adott parabola **szimmetriatengelye** az $x = \dfrac{-b}{2a}$ függőleges egyenes, hiszen

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

A **csúcspontja** pedig a szimmetriatengely és a görbe metszéspontja:

$$x_c = \frac{-b}{2a}, \quad y_c = c - \frac{b^2}{4a},$$

(erre a pontra teljesül a parabola egyenlete és a tengelyegyenes egyenlete is).



(itt $a > 0$)

Parabolák

Példa. Milyen alakzat az $y + x^2 - 4x + 3 = 0$ egyenletet kielégítő pontok halmaza?

Parabolák

Példa. Milyen alakzat az $y + x^2 - 4x + 3 = 0$ egyenletet kielégítő pontok halmaza?

$$y = -1 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 3 = -(x-2)^2 + 1$$

Mivel $a = -1$, $b = 4$ és $c = -3$,

$$x = -4/(2 \cdot (-1)) = 2 \qquad \text{szimmetriatengelyű,}$$

$$y = (-1) \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 3 = 1, \qquad (2,1) \text{ csúcspontú parabola.}$$

Parabolák

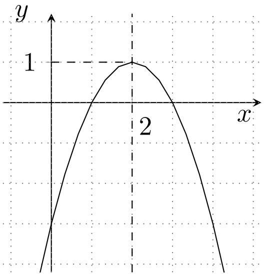
Példa. Milyen alakzat az $y + x^2 - 4x + 3 = 0$ egyenletet kielégítő pontok halmaza?

$$y = -1 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 3 = -(x-2)^2 + 1$$

Mivel $a = -1$, $b = 4$ és $c = -3$,

$x = -4/(2 \cdot (-1)) = 2$ szimmetriatengelyű,

$y = (-1) \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 3 = 1$, $(2, 1)$ csúcspontú parabola.



Parabolák

Példa. Milyen alakzat az $y + x^2 - 4x + 3 = 0$ egyenletet kielégítő pontok halmaza?

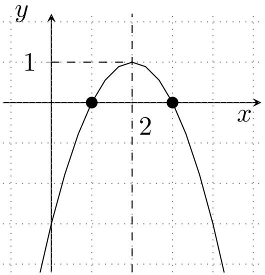
$$y = -1 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 3 = -(x-2)^2 + 1$$

Mivel $a = -1$, $b = 4$ és $c = -3$,

$x = -4/(2 \cdot (-1)) = 2$ szimmetriatengelyű,

$y = (-1) \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 3 = 1$, $(2, 1)$ csúcspontú parabola.

Az x-tengelyt az $y = 0$ koordinátájú pontokban metszi: $-x^2 + 4x - 3 = 0$ megoldásai $x_{1,2} = 1, 3$, ezért az $(1, 0)$ és $(3, 0)$ pontokon megy át a görbe.



Parabolák

Példa. Milyen alakzat az $y + x^2 - 4x + 3 = 0$ egyenletet kielégítő pontok halmaza?

$$y = -1 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 3 = -(x-2)^2 + 1$$

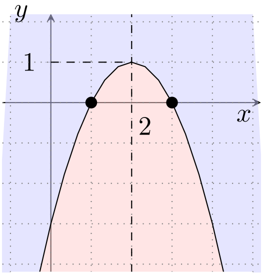
Mivel $a = -1$, $b = 4$ és $c = -3$,

$x = -4/(2 \cdot (-1)) = 2$ szimmetriatengelyű,

$y = (-1) \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 3 = 1,$ $(2, 1)$ csúcspontú parabola.

Az x-tengelyt az $y = 0$ koordinátájú pontokban metszi: $-x^2 + 4x - 3 = 0$ megoldásai $x_{1,2} = 1, 3$, ezért az $(1, 0)$ és $(3, 0)$ pontokon megy át a görbe.

Ekkor az $y < -x^2 + 4x - 3$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza a parabola alatti, még $y > -x^2 + 4x - 3$ a parabola feletti pontok halmaza.



Függvények

Egy **egyváltozós valós függvény** $f : D_f \longrightarrow R_f$ a D_f és R_f valós számhalmazok között létesít megfeleltetést úgy, hogy minden $x \in D_f$ elemhez **egyértelműen** rendel $y = f(x) \in R_f$ elemet.

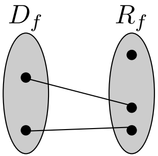
Jelölés: D_f - értelmezési tartomány, R_f - értékkészlet

$$f : x \mapsto f(x).$$

A függvények hozzárendelési típusai lehetnek:

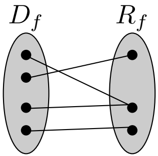
injektív

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$



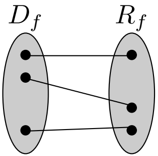
szürjektív

$$\forall y_1 \exists x_1 \Rightarrow y_1 = f(x_1)$$



bijektív(egy-egy értelmű)

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$
$$\wedge \forall y_1 \exists x_1 \Rightarrow y_1 = f(x_1)$$

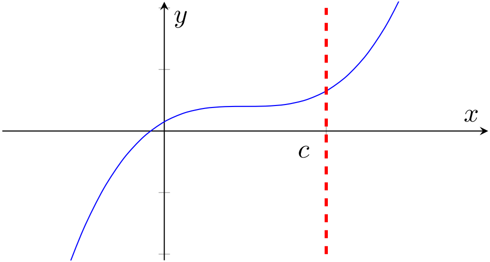


Függvénygrafikon

Ha $f : x \mapsto f(x)$ valós függvény, akkor a $\mathcal{G} = \{(x, f(x)) \,|\, x \in D_f\}$ valós számpárok halmaza a függvény **grafikonjának** pontjai a koordinátarendszerben.

Ha az (x, y) pont **illeszkedik** egy f valós függvény grafikonjára, akkor az adott pont koordinátái kielégítik az $y = f(x)$ egyenletet.

Mivel a függvényhozzárendelésben minden x értékhez egyértelműen rendelünk $y = f(x)$ értéket, ezért minden függőleges egyenes $(x = c)$ legfeljebb egyszer metszheti át a függvény grafikonját (**vertikális teszt**).



Függvényábrázolás transzformációkkal 1.

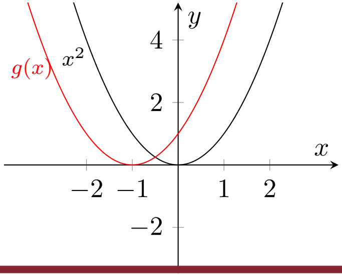
Példa. Ábrázoljuk az $f(x) = (x+1)^2 - 3$ függvény grafikonját.

Függvényábrázolás transzformációkkal 1.

Példa. Ábrázoljuk az $f(x) = (x+1)^2 - 3$ függvény grafikonját.

A $g(x) = (x+1)^2$ függvény grafikonját a x^2 függvény grafikonjának 1 egységgel való balra tolásával kapjuk.

Általánosan: ha x helyére $(x-a)$-t (vagy $(x+a)$-t) írunk a függvénybe $a > 0$ esetén, akkor a grafikont a-val balra (jobbra) toljuk.



Függvényábrázolás transzformációkkal 1.

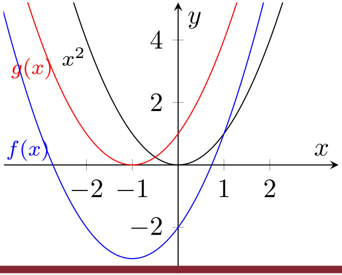
Példa. Ábrázoljuk az $f(x) = (x+1)^2 - 3$ függvény grafikonját.

A $g(x) = (x+1)^2$ függvény grafikonját a x^2 függvény grafikonjának 1 egységgel való balra tolásával kapjuk.

Általánosan: ha x helyére $(x-a)$-t (vagy $(x+a)$-t) írunk a függvénybe $a > 0$ esetén, akkor a grafikont a-val balra (jobbra) toljuk.

Az $f(x) = (x+1)^2 - 3$ függvény grafikonját a $g(x)$ függvény grafikonjának 3-mal való lefelé tolásával kapjuk.

Általánosan: ha az $f(x)$-hez hozzáadunk (levonunk) $b > 0$-t, akkor a grafikont b-vel felfelé (lefelé) toljuk.



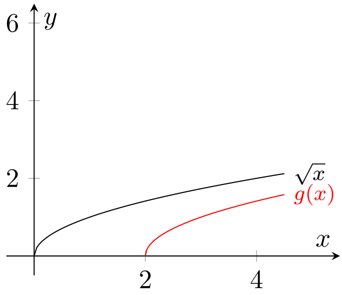
Függvényábrázolás transzformációkkal 2.

Példa. Ábrázoljuk az $f(x) = 3\sqrt{x-2}$ függvény grafikonját.

Függvényábrázolás transzformációkkal 2.

Példa. Ábrázoljuk az $f(x) = 3\sqrt{x-2}$ függvény grafikonját.

A $g(x) = \sqrt{x-2}$ függvény grafikonját a $\sqrt{x}$ függvény grafikonjának 2 egységgel való jobbra tolásával kapjuk.



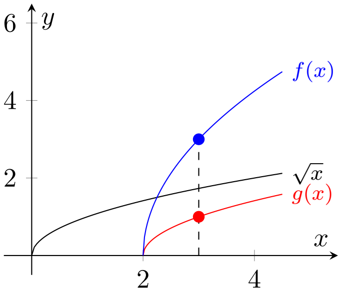
Függvényábrázolás transzformációkkal 2.

Példa. Ábrázoljuk az $f(x) = 3\sqrt{x-2}$ függvény grafikonját.

A $g(x) = \sqrt{x-2}$ függvény grafikonját a $\sqrt{x}$ függvény grafikonjának 2 egységgel való jobbra tolásával kapjuk.

Az $f(x) = 3\sqrt{x-2}$ függvény grafikonját a $g(x)$ függvény grafikonjának y irányú 3-szorosára nyújtásával kapjuk.

Általánosan: ha az $f(x)$-et szorozzuk (osztjuk) $b > 1$ számmal, akkor a grafikont az y-tengely irányába nyújtjuk (összenyomjuk).



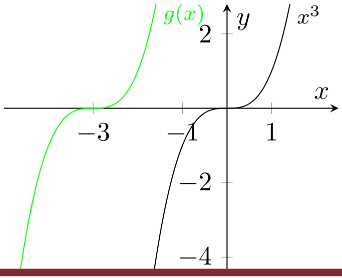
Függvényábrázolás transzformációkkal 3.

Példa. Ábrázoljuk az $f(x) = 1 - (x+3)^3$ függvény grafikonját.

Függvényábrázolás transzformációkkal 3.

Példa. Ábrázoljuk az $f(x) = 1 - (x+3)^3$ függvény grafikonját.

A $g(x) = (x+3)^3$ függvény grafikonját az x^3 függvény grafikonjának 3 egységgel való balra tolásával kapjuk.



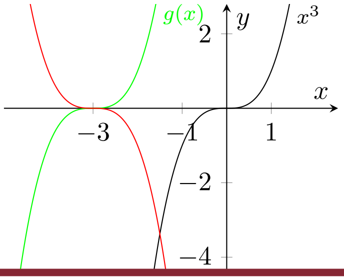
Függvényábrázolás transzformációkkal 3.

Példa. Ábrázoljuk az $f(x) = 1 - (x+3)^3$ függvény grafikonját.

A $g(x) = (x+3)^3$ függvény grafikonját az x^3 függvény grafikonjának 3 egységgel való balra tolásával kapjuk.

A $h(x) = -(x+3)^3$ függvény grafikonját a $g(x)$ függvény grafikonjának x-tengelyre tükrözésével kapjuk.

Általánosan: ha az $f(x)$-et -1-gyel szorozzuk, akkor a grafikont az x-tengelyre tükrözzük.



Függvényábrázolás transzformációkkal 3.

Példa. Ábrázoljuk az $f(x) = 1 - (x+3)^3$ függvény grafikonját.

A $g(x) = (x+3)^3$ függvény grafikonját az x^3 függvény grafikonjának 3 egységgel való balra tolásával kapjuk.

A $h(x) = -(x+3)^3$ függvény grafikonját a $g(x)$ függvény grafikonjának x-tengelyre tükrözésével kapjuk.

Általánosan: ha az $f(x)$-et -1-gyel szorozzuk, akkor a grafikont az x-tengelyre tükrözzük.

Végül az $f(x) = 1 - (x+3)^3$ függvény grafikonját a $h(x)$ függvény grafikonjának 1-gyel való felfelé tolásával kapjuk.