Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2024. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

3. előd́ás:
Polinomok,
függvények alaptulajdonságai,
nevezetes függvények

Polinomok

Azokat az egyváltozós kifejezéseket, melyeket a következő alakban írhatunk fel, **valós együtthatós polinomoknak** nevezzük:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,\ a_k \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

Polinomok

Azokat az egyváltozós kifejezéseket, melyeket a következő alakban írhatunk fel, **valós együtthatós polinomoknak** nevezzük:

$$p(x) = a_n x^{n} + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,\ a_k \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

$p(x)$ polinom **fokszáma**: n jelölése: $\deg p = n$

Polinomok

Azokat az egyváltozós kifejezéseket, melyeket a következő alakban írhatunk fel, **valós együtthatós polinomoknak** nevezzük:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,\ a_k \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

$p(x)$ polinom **fokszáma**: n jelölése: $\deg p = n$

a_n **főegyüttható**,

Polinomok

Azokat az egyváltozós kifejezéseket, melyeket a következő alakban írhatunk fel, **valós együtthatós polinomoknak** nevezzük:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,\ a_k \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

$p(x)$ polinom **fokszáma**: n jelölése: $\deg p = n$

a_n **főegyüttható**, a_k együtthatók,

Polinomok

Azokat az egyváltozós kifejezéseket, melyeket a következő alakban írhatunk fel, **valós együtthatós polinomoknak** nevezzük:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,\ a_k \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

$p(x)$ polinom **fokszáma**: n jelölése: $\deg p = n$

a_n **főegyüttható**, a_k együtthatók, a_0 **konstans tag**

Polinomok

Azokat az egyváltozós kifejezéseket, melyeket a következő alakban írhatunk fel, **valós együtthatós polinomoknak** nevezzük:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad a_n \neq 0,\ a_k \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

$p(x)$ polinom **fokszáma**: n jelölése: $\deg p = n$

a_n **főegyüttható**, a_k együtthatók, a_0 **konstans tag**

Például: $3x^5 - 2x + 12$

Polinomok

Azokat az egyváltozós kifejezéseket, melyeket a következő alakban írhatunk fel, **valós együtthatós polinomoknak** nevezzük:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,\ a_k \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

$p(x)$ polinom **fokszáma**: n jelölése: $\deg p = n$

a_n **főegyüttható**, a_k együtthatók, a_0 **konstans tag**

Például: $3x^5 - 2x + 12$ fokszám: 5

Azokat az egyváltozós kifejezéseket, melyeket a következő alakban írhatunk fel, **valós együtthatós polinomoknak** nevezzük:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,\ a_k \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

$p(x)$ polinom **fokszáma**: n jelölése: $\deg p = n$

a_n **főegyüttható**, a_k együtthatók, a_0 **konstans tag**

Például: $3x^5 - 2x + 12$ fokszám: 5, főegyüttható: 3

Polinomok

Azokat az egyváltozós kifejezéseket, melyeket a következő alakban írhatunk fel, **valós együtthatós polinomoknak** nevezzük:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad a_n \neq 0,\ a_k \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

$p(x)$ polinom **fokszáma**: n jelölése: $\deg p = n$

a_n **főegyüttható**, a_k együtthatók, a_0 **konstans tag**

Például: $3x^5 - 2x + 12$ fokszám: 5, főegyüttható: 3, együtthatók: $3,\ -2$

Polinomok

Azokat az egyváltozós kifejezéseket, melyeket a következő alakban írhatunk fel, **valós együtthatós polinomoknak** nevezzük:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad a_n \neq 0,\ a_k \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$

$p(x)$ polinom **fokszáma**: n jelölése: $\deg p = n$

a_n **főegyüttható**, a_k együtthatók, a_0 **konstans tag**

Például: $3x^5 - 2x + 12$ fokszám: 5, főegyüttható: 3, együtthatók: $3,\ -2$, konstans tag: 12.

Speciális esetek:

$p(x) \equiv c$ **konstans polinom** $(\deg = 0)$

$p(x) = ax + b$ **lineáris polinom** $(\deg = 1,$ feltéve $a \neq 0.)$

Polinomok gyökei

Polinom **nullhelye vagy gyöke:** az az x_0 szám, melyre $p(x_0) = 0$.

Polinomok gyökei

Polinom **nullhelye vagy gyöke:** az az x_0 szám, melyre $p(x_0) = 0$.

Példa(korábbi parabola)

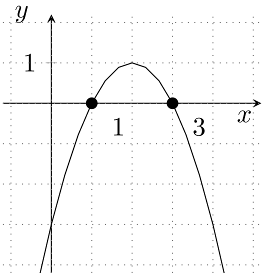
$$-x^2 + 4x - 3 = 0$$

egyenlet megoldásai $x_{1,2} = 1, 3$.

Ezért az $(1, 0)$ és $(3, 0)$ pontokon átmegy a görbe.

Továbbá felírható úgy, hogy:

$$-x^2 + 4x - 3 = -(x - 1)(x - 3).$$



Polinomok gyökei

Polinom **nullhelye vagy gyöke:** az az x_0 szám, melyre $p(x_0) = 0$.

Példa(korábbi parabola)

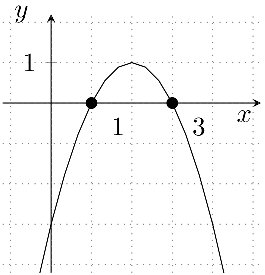
$$-x^2 + 4x - 3 = 0$$

egyenlet megoldásai $x_{1,2} = 1, 3$.

Ezért az $(1, 0)$ és $(3, 0)$ pontokon átmegy a görbe.

Továbbá felírható úgy, hogy:

$$-x^2 + 4x - 3 = -(x - 1)(x - 3).$$



Bézout-tétel: Ha x_0 gyöke a $p(x)$ n-ed fokú polinomnak, akkor létezik egy $q(x)$ polinom, melyre $p(x) = (x - x_0) \cdot q(x)$. Azaz az $x - x_0$ elsőfokú polinom legalább egyszer kiemelhető $p(x)$-ből.

Polinomok gyöktényezős alakja

Példa: Vizsgáljuk az $x^3 + 2x^2 + x$ polinomot!

Polinomok gyöktényezős alakja

Példa: Vizsgáljuk az $x^3 + 2x^2 + x$ polinomot!

$x = 0$ gyök lesz (0 a konstans tag), tehát $(x - 0) = x$ kiemelhető:

$$x^3 + 2x^2 + x = x\left(x^2 + 2x + 1\right).$$

Polinomok gyöktényezős alakja

Példa: Vizsgáljuk az $x^3 + 2x^2 + x$ polinomot!

$x = 0$ gyök lesz (0 a konstans tag), tehát $(x - 0) = x$ kiemelhető:

$$x^3 + 2x^2 + x = x\,(x^2 + 2x + 1).$$

Tudjuk, hogy $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$, tehát $x = -1$ is gyök, $(x + 1)$ szintén kiemelhető:

$$x^3 + 2x^2 + x = x\,(x + 1)(x + 1) = x\,(x + 1)^2.$$

Polinomok gyöktényezős alakja

Példa: Vizsgáljuk az $x^3 + 2x^2 + x$ polinomot!

$x = 0$ gyök lesz (0 a konstans tag), tehát $(x - 0) = x$ kiemelhető:

$$x^3 + 2x^2 + x = x\,(x^2 + 2x + 1).$$

Tudjuk, hogy $x^2+2x+1 = (x+1)^2$, tehát $x = -1$ is gyök, $(x+1)$ szintén kiemelhető:

$$x^3 + 2x^2 + x = x\,(x+1)(x+1) = x\,(x+1)^2.$$

A polinomot elsőfokú polinomok – $(x-x_0)$ alakú gyöktényezők – szorzatára bontottuk.

Polinomok gyöktényezős alakja

Példa: Vizsgáljuk az $x^3 + 2x^2 + x$ polinomot!

$x = 0$ gyök lesz (0 a konstans tag), tehát $(x - 0) = x$ kiemelhető:

$$x^3 + 2x^2 + x = x\,(x^2 + 2x + 1).$$

Tudjuk, hogy $x^2+2x+1 = (x+1)^2$, tehát $x = -1$ is gyök, $(x+1)$ szintén kiemelhető:

$$x^3 + 2x^2 + x = x\,(x + 1)(x + 1) = x\,(x + 1)^2.$$

A polinomot elsőfokú polinomok – $(x-x_0)$ alakú gyöktényezők – szorzatára bontottuk.

Egy polinom x_0 gyökének **multiplicitásán** azt a legnagyobb $k \in \mathbb{Z}^+$ kitevőt értjük, melyre $(x - x_0)^k$ kiemelhető a polinomból.

Polinomok gyöktényezős alakja

Példa: Vizsgáljuk az $x^3 + 2x^2 + x$ polinomot!

$x = 0$ gyök lesz (0 a konstans tag), tehát $(x - 0) = x$ kiemelhető:

$$x^3 + 2x^2 + x = x\,(x^2 + 2x + 1).$$

Tudjuk, hogy $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$, tehát $x = -1$ is gyök, $(x+1)$ szintén kiemelhető:

$$x^3 + 2x^2 + x = x\,(x+1)(x+1) = x\,(x+1)^2.$$

A polinomot elsőfokú polinomok – $(x - x_0)$ alakú gyöktényezők – szorzatára bontottuk.

Egy polinom x_0 gyökének **multiplicitásán** azt a legnagyobb $k \in \mathbb{Z}^+$ kitevőt értjük, melyre $(x - x_0)^k$ kiemelhető a polinomból.

Példában:

- $x = 0$ egyszeres gyök, multiplicitása 1,
- $x = -1$ kétszeres gyök, multiplicitása 2.

Polinomok gyöktényezős alakja

Egy $p(x)$ polinom **irreducibilis** a valós számok felett, ha minden lehetséges $p(x) = q(x) \cdot r(x)$ valós polinomokból álló szorzatra bontása esetén valamelyik tényező konstans polinom.

Polinomok gyöktényezős alakja

Egy $p(x)$ polinom **irreducibilis** a valós számok felett, ha minden lehetséges $p(x) = q(x) \cdot r(x)$ valós polinomokból álló szorzatra bontása esetén valamelyik tényező konstans polinom.

Korábbi példában: A megadott $x + 1$ gyöktényező irreducibilis, hiszen már elsőfokú polinom (két legalább első fokú polinom szorzata legalább másodfokú lesz).

Polinomok gyöktényezős alakja

Egy $p(x)$ polinom **irreducibilis** a valós számok felett, ha minden lehetséges $p(x) = q(x) \cdot r(x)$ valós polinomokból álló szorzatra bontása esetén valamelyik tényező konstans polinom.

Korábbi példában: A megadott $x + 1$ gyöktényező irreducibilis, hiszen már elsőfokú polinom (két legalább első fokú polinom szorzata legalább másodfokú lesz).

Továbbá például az $x^2 + 1$ polinom nem bontható gyöktényezőkre, mert nincs gyöke a polinomnak ($x^2 = -1$ nem oldható meg a valós számok felett), azaz irreducibilis.

Polinomok gyöktényezős alakja

Egy $p(x)$ polinom **irreducibilis** a valós számok felett, ha minden lehetséges $p(x) = q(x) \cdot r(x)$ valós polinomokból álló szorzatra bontása esetén valamelyik tényező konstans polinom.

Korábbi példában: A megadott $x + 1$ gyöktényező irreducibilis, hiszen már elsőfokú polinom (két legalább első fokú polinom szorzata legalább másodfokú lesz).

Továbbá például az $x^2 + 1$ polinom nem bontható gyöktényezőkre, mert nincs gyöke a polinomnak ($x^2 = -1$ nem oldható meg a valós számok felett), azaz irreducibilis.

Algebra alaptételének következménye: Minden valós együtthatós polinom előáll elsőfokú és negatív diszkriminánsú másodfokú polinomok szorzataként. (nem bizonyítjuk)

Polinomok egész gyökei

Ha az $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ **egész** együtthatós polinom $(a_n, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{Z})$, és p **egész** gyöke a polinomnak, akkor teljesül, hogy p osztója a_0-nak.

Bizonyítás. Ha $x = p \in \mathbb{Z}$ gyök, akkor

$$\underbrace{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p}_{\text{osztható } p\text{-vel}} + a_0 = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{így } a_0 \text{ osztható } p\text{-vel.}$$

Példa: Keressük meg az $x^3 + 6x^2 + 10x + 3$ polinom egész gyökeit!

Lehetséges gyökök a 3 osztói: $-3, -1, 1, 3$.

Ezeket behelyettesítgetve $x_1 = -3$ gyök (többi nem), mivel

$$(-3)^3 + 6(-3)^2 + 10(-3) + 3 = -27 + 54 - 30 + 3 = 0.$$

Ekkor az $(x+3)$-at kell kiemelnünk a polinomból. Hogyan?

Polinomok osztása

Példa folytatása - osszuk el az $x^3 + 6x^2 + 10x + 3$ polinomot $x + 3$-mal:

Polinomok osztása

Példa folytatása - osszuk el az $x^3 + 6x^2 + 10x + 3$ polinomot $x + 3$-mal:

$$x^3 \quad + \quad 6x^2 \quad + \quad 10x \quad + \quad 3 \quad : (x+3) = x^2$$

Polinomok osztása

Példa folytatása - osszuk el az $x^3 + 6x^2 + 10x + 3$ polinomot $x + 3$-mal:

$$\begin{array}{ccccccc} x^3 & + & 6x^2 & + & 10x & + & 3 \\ x^3 & + & 3x^2 & & & & \\ \hline \end{array} : (x+3) = x^2$$

Polinomok osztása

Példa folytatása - osszuk el az $x^3 + 6x^2 + 10x + 3$ polinomot $x + 3$-mal:

$$\begin{array}{ccccccc} x^3 & + & 6x^2 & + & 10x & + & 3 \\ x^3 & + & 3x^2 & & & & \\ \hline & & 3x^2 & + & 10x & + & 3 \end{array} : (x+3) = x^2 + 3x$$

Polinomok osztása

Példa folytatása - osszuk el az $x^3 + 6x^2 + 10x + 3$ polinomot $x + 3$-mal:

$$
\begin{array}{ccccccc}
x^3 & + & 6x^2 & + & 10x & + & 3 \\
x^3 & + & 3x^2 & & & & \\
\hline
 & & 3x^2 & + & 10x & + & 3 \\
 & & 3x^2 & + & 9x & & \\
\cline{3-7}
\end{array}
: (x+3) = x^2 + 3x
$$

Polinomok osztása

Példa folytatása - osszuk el az $x^3 + 6x^2 + 10x + 3$ polinomot $x + 3$-mal:

$$
\begin{array}{ccccccc}
x^3 & + & 6x^2 & + & 10x & + & 3 \\
x^3 & + & 3x^2 & & & & \\
\hline
 & & 3x^2 & + & 10x & + & 3 \\
 & & 3x^2 & + & 9x & & \\
\cline{3-7}
 & & & & x & + & 3
\end{array}
\quad : (x+3) = x^2 + 3x + 1
$$

Polinomok osztása

Példa folytatása - osszuk el az $x^3 + 6x^2 + 10x + 3$ polinomot $x + 3$-mal:

$$
\begin{array}{ccccccc}
x^3 & + & 6x^2 & + & 10x & + & 3 \\
x^3 & + & 3x^2 & & & & \\
\hline
 & & 3x^2 & + & 10x & + & 3 \\
 & & 3x^2 & + & 9x & & \\
\cline{3-7}
 & & & & x & + & 3 \\
 & & & & x & + & 3 \\
\cline{5-7}
\end{array}
\; : (x+3) = x^2 + 3x + 1
$$

Polinomok osztása

Példa folytatása - osszuk el az $x^3+6x^2+10x+3$ polinomot $x+3$-mal:

$$
\begin{array}{ccccccc}
x^3 & + & 6x^2 & + & 10x & + & 3 \\
x^3 & + & 3x^2 & & & & \\
\hline
 & & 3x^2 & + & 10x & + & 3 \\
 & & 3x^2 & + & 9x & & \\
\cline{3-7}
 & & & & x & + & 3 \\
 & & & & x & + & 3 \\
\cline{5-7}
 & & & & & & 0
\end{array}
\quad : (x+3) = x^2+3x+1
$$

Polinomok osztása

Példa folytatása - osszuk el az $x^3 + 6x^2 + 10x + 3$ polinomot $x + 3$-mal:

$$\begin{array}{ccccccc}
x^3 & + & 6x^2 & + & 10x & + & 3 \quad : (x+3) = x^2 + 3x + 1 \\
x^3 & + & 3x^2 & & & & \\
\hline
 & & 3x^2 & + & 10x & + & 3 \\
 & & 3x^2 & + & 9x & & \\
\hline
 & & & & x & + & 3 \\
 & & & & x & + & 3 \\
\hline
 & & & & & & 0
\end{array}$$

Azaz $x^3 + 6x^2 + 10x + 3 = (x+3)(x^2 + 3x + 1)$.
Végül az $x^2 + 3x + 1 = 0$ másodfokú egyenletet megoldjuk:

$$x_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Tehát a polinom gyökei: -3, $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$. A gyöktényezős alak pedig:

$$x^3 + 6x^2 + 10x + 3 = (x+3)\left(x - \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right).$$

Polinomok maradékos osztása

Az $f(x)$ és $g(x)$ polinomokhoz léteznek $q(x)$ és $r(x)$ polinomok úgy, hogy

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), \qquad \deg r < \deg g.$$

Elnevezés: $g(x)$ az osztó, $r(x)$ a maradék.

Példa. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 3$ és $g(x) = x - 2$ polinomok osztása

Polinomok maradékos osztása

Az $f(x)$ és $g(x)$ polinomokhoz léteznek $q(x)$ és $r(x)$ polinomok úgy, hogy

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), \qquad \deg r < \deg g.$$

Elnevezés: $g(x)$ az osztó, $r(x)$ a maradék.

Példa. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 3$ és $g(x) = x - 2$ polinomok osztása

$$x^3 \quad + \quad 3x^2 \quad - \quad 5x \quad + \quad 3 \quad : (x-2) = x^2$$

Polinomok maradékos osztása

Az $f(x)$ és $g(x)$ polinomokhoz léteznek $q(x)$ és $r(x)$ polinomok úgy, hogy

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), \qquad \deg r < \deg g.$$

Elnevezés: $g(x)$ az osztó, $r(x)$ a maradék.

Példa. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 3$ és $g(x) = x - 2$ polinomok osztása

$$\begin{array}{rrrrrrrl} x^3 & + & 3x^2 & - & 5x & + & 3 & : (x-2) = x^2 \\ x^3 & - & 2x^2 & & & & & \\ \hline \end{array}$$

Polinomok maradékos osztása

Az $f(x)$ és $g(x)$ polinomokhoz léteznek $q(x)$ és $r(x)$ polinomok úgy, hogy

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), \qquad \deg r < \deg g.$$

Elnevezés: $g(x)$ az osztó, $r(x)$ a maradék.

Példa. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 3$ és $g(x) = x - 2$ polinomok osztása

$$\begin{array}{ccccccc l}
x^3 & + & 3x^2 & - & 5x & + & 3 & : (x-2) = x^2 + 5x \\
x^3 & - & 2x^2 & & & & & \\
\hline
 & & 5x^2 & - & 5x & + & 3 &
\end{array}$$

Polinomok maradékos osztása

Az $f(x)$ és $g(x)$ polinomokhoz léteznek $q(x)$ és $r(x)$ polinomok úgy, hogy

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), \qquad \deg r < \deg g.$$

Elnevezés: $g(x)$ az osztó, $r(x)$ a maradék.

Példa. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 3$ és $g(x) = x - 2$ polinomok osztása

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
x^3 & + & 3x^2 & - & 5x & + & 3 & : (x-2) = x^2 + 5x \\
x^3 & - & 2x^2 & & & & & \\
\hline
 & & 5x^2 & - & 5x & + & 3 & \\
 & & 5x^2 & - & 10x & & & \\
\cline{3-7}
\end{array}$$

Polinomok maradékos osztása

Az $f(x)$ és $g(x)$ polinomokhoz léteznek $q(x)$ és $r(x)$ polinomok úgy, hogy

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), \qquad \deg r < \deg g.$$

Elnevezés: $g(x)$ az osztó, $r(x)$ a maradék.

Példa. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 3$ és $g(x) = x - 2$ polinomok osztása

$$\begin{array}{ccccccc}
x^3 & + & 3x^2 & - & 5x & + & 3 \\
x^3 & - & 2x^2 & & & & \\
\hline
 & & 5x^2 & - & 5x & + & 3 \\
 & & 5x^2 & - & 10x & & \\
\cline{3-7}
 & & & & 5x & + & 3
\end{array} \quad : (x-2) = x^2 + 5x + 5$$

Polinomok maradékos osztása

Az $f(x)$ és $g(x)$ polinomokhoz léteznek $q(x)$ és $r(x)$ polinomok úgy, hogy

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), \qquad \deg r < \deg g.$$

Elnevezés: $g(x)$ az osztó, $r(x)$ a maradék.

Példa. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 3$ és $g(x) = x - 2$ polinomok osztása

$$\begin{array}{rcrcrcr l}
x^3 & + & 3x^2 & - & 5x & + & 3 & : (x-2) = x^2 + 5x + 5 \\
x^3 & - & 2x^2 & & & & & \\
\hline
 & & 5x^2 & - & 5x & + & 3 & \\
 & & 5x^2 & - & 10x & & & \\
\cline{3-7}
 & & & & 5x & + & 3 & \\
 & & & & 5x & - & 10 & \\
\cline{5-7}
\end{array}$$

Polinomok maradékos osztása

Az $f(x)$ és $g(x)$ polinomokhoz léteznek $q(x)$ és $r(x)$ polinomok úgy, hogy

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), \qquad \deg r < \deg g.$$

Elnevezés: $g(x)$ az osztó, $r(x)$ a maradék.

Példa. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 3$ és $g(x) = x - 2$ polinomok osztása

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
x^3 & + & 3x^2 & - & 5x & + & 3 & : (x-2) = x^2 + 5x + 5 \\
x^3 & - & 2x^2 & & & & & \\
\hline
 & & 5x^2 & - & 5x & + & 3 & \\
 & & 5x^2 & - & 10x & & & \\
\cline{3-7}
 & & & & 5x & + & 3 & \\
 & & & & 5x & - & 10 & \\
\cline{5-7}
 & & & & & & 13 &
\end{array}$$

Polinomok maradékos osztása

Az $f(x)$ és $g(x)$ polinomokhoz léteznek $q(x)$ és $r(x)$ polinomok úgy, hogy

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), \qquad \deg r < \deg g.$$

Elnevezés: $g(x)$ az osztó, $r(x)$ a maradék.

Példa. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 3$ és $g(x) = x - 2$ polinomok osztása

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
x^3 & + & 3x^2 & - & 5x & + & 3 & : (x-2) = x^2 + 5x + 5 \\
x^3 & - & 2x^2 & & & & & \\
\hline
 & & 5x^2 & - & 5x & + & 3 & \\
 & & 5x^2 & - & 10x & & & \\
\cline{3-7}
 & & & & 5x & + & 3 & \\
 & & & & 5x & - & 10 & \\
\cline{5-7}
 & & & & & & 13 &
\end{array}$$

Tehát a maradék 13, és $x^3 + 3x^2 - 5x + 3 = (x^2 + 5x + 5)(x - 2) + 13$.

Függvények

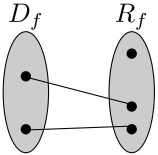
Egy **egyváltozós valós függvény** $f : D_f \longrightarrow R_f$ a D_f és R_f valós számhalmazok között létesít megfeleltetést úgy, hogy minden $x \in D_f$ elemhez **egyértelműen** rendel $y = f(x) \in R_f$ elemet.

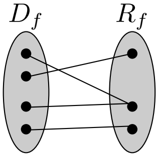
Jelölés: D_f - értelmezési tartomány, R_f - értékkészlet

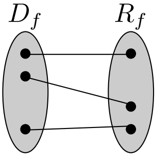
$$f : x \mapsto f(x).$$

A függvények hozzárendelési típusai lehetnek:

injektív	szürjektív	bijektív(egy-egy értelmű)
$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$	$\forall y_1 \exists x_1 \Rightarrow y_1 = f(x_1)$	$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ $\wedge \forall y_1 \exists x_1 \Rightarrow y_1 = f(x_1)$





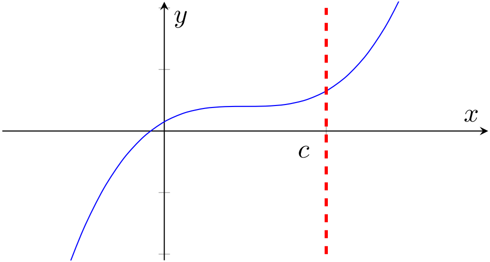


Függvénygrafikon

Ha $f : x \mapsto f(x)$ valós függvény, akkor a $\mathcal{G} = \{(x, f(x)) \,|\, x \in D_f\}$ valós számpárok halmaza a függvény **grafikonjának** pontjai a koordinátarendszerben.

Ha az (x, y) pont **illeszkedik** egy f valós függvény grafikonjára, akkor az adott pont koordinátái kielégítik az $y = f(x)$ egyenletet.

Mivel a függvényhozzárendelésben minden x értékhez egyértelműen rendelünk $y = f(x)$ értéket, ezért minden függőleges egyenes $(x = c)$ legfeljebb egyszer metszheti át a függvény grafikonját (**vertikális teszt**).



Függvények értelmezési tartománya

Valós függvények **természetes értelmezési tartományán** azt a legbővebb valós számhalmazt értjük, melynek elemeire kiszámítható a függvényérték.

Néhány egyszerűbb függvény értelmezési tartománya és értékkészlete:

$f(x)$	D_f	R_f
$a \cdot x + b$	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \infty)$
x^2	$(-\infty, \infty)$	$[0, \infty)$
$1/x$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$\sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$

Nevezetes függvények - Az abszolútérték-függvény

Definíció: Az $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ abszolútérték-függvény az a hozzárendelés, mely minden valós $x \in \mathbb{R}$ számhoz a szám abszolútértékét rendeli, azaz

$$f : \mathbb{R} \to [0, \infty), \qquad x \longmapsto f(x) := |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

szürjektív, de nem injektív, például $|1| = |-1| = 1$, és $R_f = [0, \infty)$.

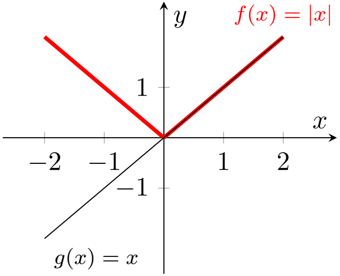
Nevezetes függvények - Az abszolútérték-függvény

Definíció: Az $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ abszolútérték-függvény az a hozzárendelés, mely minden valós $x \in \mathbb{R}$ számhoz a szám abszolútértékét rendeli, azaz

$$f : \mathbb{R} \to [0, \infty), \quad x \longmapsto f(x) := |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

szürjektív, de nem injektív, például $|1| = |-1| = 1$, és $R_f = [0, \infty)$.

Grafikonját úgy kaphatjuk meg, hogy tekintjük a $g(x) = x$ függvényt, majd ennek a függvénynek az x-tengely alatti pontjait tükrözzük az x-tegelyre.

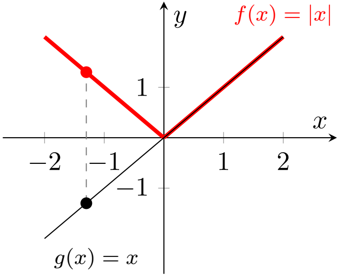


Definíció: Az $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ abszolútérték-függvény az a hozzárendelés, mely minden valós $x \in \mathbb{R}$ számhoz a szám abszolútértékét rendeli, azaz

$$f : \mathbb{R} \to [0, \infty), \quad x \longmapsto f(x) := |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

szürjektív, de nem injektív, például $|1| = |-1| = 1$, és $R_f = [0, \infty)$.

Grafikonját úgy kaphatjuk meg, hogy tekintjük a $g(x) = x$ függvényt, majd ennek a függgénynek az x-tengely alatti pontjait tükrözzük az x-tegelyre.



Nevezetes függvények - Az abszolútérték-függvény

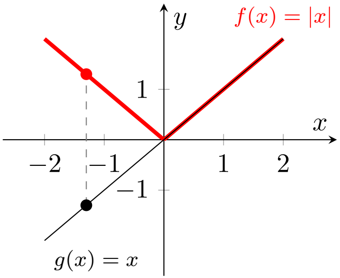
Definíció: Az $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ abszolútérték-függvény az a hozzárendelés, mely minden valós $x \in \mathbb{R}$ számhoz a szám abszolútértékét rendeli, azaz

$$f : \mathbb{R} \to [0, \infty), \quad x \longmapsto f(x) := |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

szürjektív, de nem injektív, például $|1| = |-1| = 1$, és $R_f = [0, \infty)$.

Grafikonját úgy kaphatjuk meg, hogy tekintjük a $g(x) = x$ függvényt, majd ennek a függvénynek az x-tengely alatti pontjait tükrözzük az x-tegelyre.

Megjegyzés: Ezzel a módszerrel bármely függvényhozzárendelés abszolútértékének grafikonja is megrajzolható!



Abszolútértékes egyenletek és egyenlőtlenségek

1.Példa: Oldjuk meg a valós számok halmazán az egyenletet

$$|2x - 3| = 4.$$

1.Példa: Oldjuk meg a valós számok halmazán az egyenletet

$$|2x-3|=4.$$

Megoldás:

Abszolútértékes egyenletek és egyenlőtlenségek

1.Példa: Oldjuk meg a valós számok halmazán az egyenletet

$$|2x - 3| = 4.$$

Megoldás: Esetszétválasztással.

Ha $2x - 3 \geq 0$, azaz $x \geq 1,5$, akkor

$$\begin{aligned} 2x - 3 &= 4 \\ 2x &= 7 \\ x &= 3,5. \end{aligned}$$

Ha $2x - 3 < 0$, azaz $x < 1,5$, akkor

$$\begin{aligned} 2x - 3 &= -4 \\ 2x &= -4 + 3 = -1 \\ x &= -0,5. \end{aligned}$$

Tehát az egyenlet két megoldása az $x = -0,5$ és $x = 3,5$.

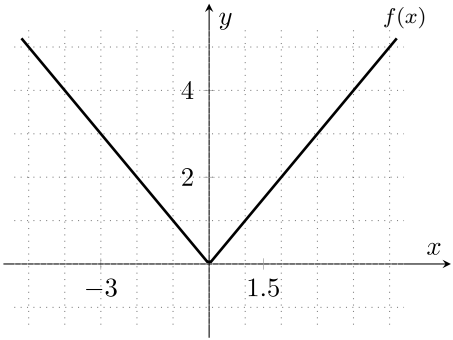
Abszolútértékes egyenletek és egyenlőtlenségek

1.Példa: Oldjuk meg a valós számok halmazán az egyenletet

$$|2x - 3| = 4.$$

Megoldás: Grafikusan.

$f(x) = |x|$,



1.Példa: Oldjuk meg a valós számok halmazán az egyenletet

$$|2x - 3| = 4.$$

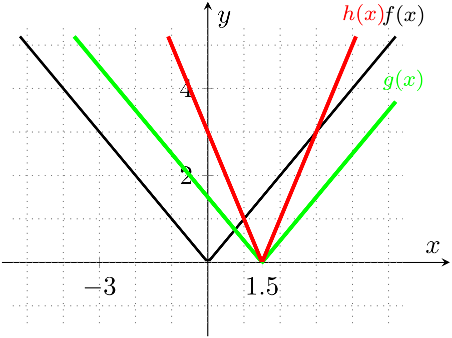
Megoldás: Grafikusan.

$f(x) = |x|$,

$g(x) = f(x - 1,5) = |x - 1,5|$,

$h(x) = g(2x) = f(2x - 3) =$

$= |2x - 3|$,



1.Példa: Oldjuk meg a valós számok halmazán az egyenletet

$$|2x - 3| = 4.$$

Megoldás: Grafikusan.

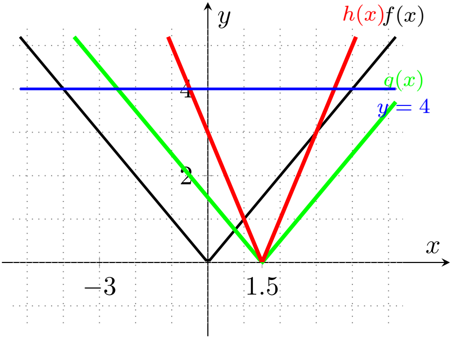
$f(x) = |x|,$

$g(x) = f(x - 1,5) = |x - 1,5|,$

$h(x) = g(2x) = f(2x - 3) =$

$= |2x - 3|,$

$y = 4$



1.Példa: Oldjuk meg a valós számok halmazán az egyenletet

$$|2x - 3| = 4.$$

Megoldás: Grafikusan.

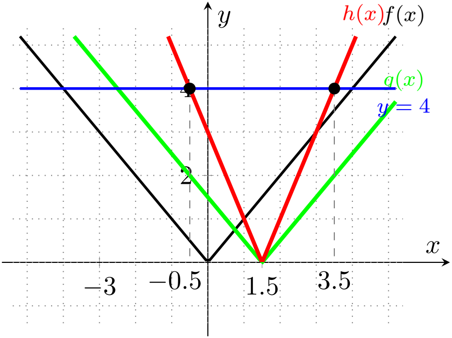
$f(x) = |x|$,

$g(x) = f(x - 1,5) = |x - 1,5|$,

$h(x) = g(2x) = f(2x - 3) =$

$= |2x - 3|$,

$y = 4$



$h(x) = 4$,

ha $x = -0,5$ vagy $3,5$.

1.Példa: Oldjuk meg a valós számok halmazán az egyenletet

$$|2x-3| = 4.$$

Megoldás: Grafikusan.

$f(x) = |x|\,,$

$g(x) = f(x-1,5) = |x-1,5|\,,$

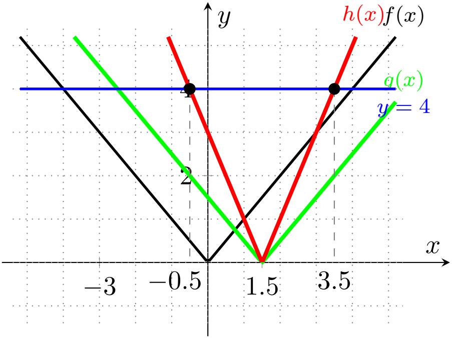
$h(x) = g(2x) = f(2x-3) =$

$= |2x-3|\,,$

$y = 4$

$h(x) = 4,$

ha $x = -0,5$ vagy $3,5.$



Tehát az egyenlet két megoldása az $x = -0,5$ és $x = 3,5$.

2.Példa: Oldjuk meg a valós számok halmazán az egyenlőtlenséget

$$|2x-3| < 4.$$

2.Példa: Oldjuk meg a valós számok halmazán az egyenlőtlenséget

$$|2x - 3| < 4.$$

Megoldás:

Abszolútértékes egyenletek és egyenlőtlenségek

2.Példa: Oldjuk meg a valós számok halmazán az egyenlőtlenséget

$$|2x - 3| < 4.$$

Megoldás: Esetszétválasztással.

Ha $2x - 3 \geq 0$ azaz $x \geq 1,5$, akkor

$$\begin{aligned} 2x - 3 &< 4 \\ 2x &< 7 \\ 1,5 \leq x &< 3,5. \end{aligned}$$

Ha $2x - 3 < 0$, azaz $x < 1,5$, akkor

$$\begin{aligned} -2x + 3 &< 4 \\ 2x - 3 &> -4 \\ 2x &> -1 \\ 1,5 > x &> -0,5. \end{aligned}$$

Tehát az egyenlőtlenség megoldásai az $-0,5 < x < 3,5$ számok, azaz $x \in (-0,5; 3,5)$ intervallum elemei.

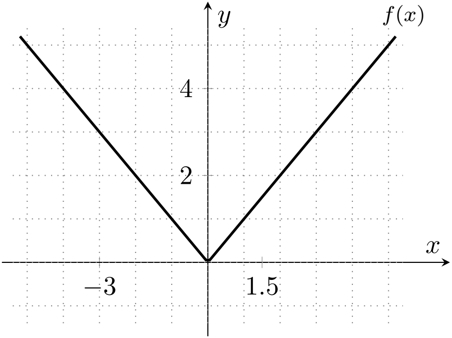
Abszolútértékes egyenletek és egyenlőtlenségek

2.Példa: Oldjuk meg a valós számok halmazán az egyenlőtlenséget

$$|2x-3|<4.$$

Megoldás: Grafikusan.

$f(x)=|x|,$



Abszolútértékes egyenletek és egyenlőtlenségek

2.Példa: Oldjuk meg a valós számok halmazán az egyenlőtlenséget

$$|2x-3| < 4.$$

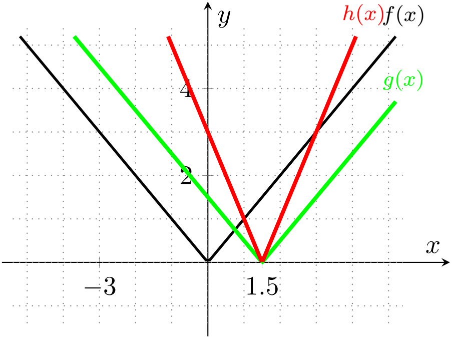
Megoldás: Grafikusan.

$f(x) = |x|$,

$g(x) = f(x-1,5) = |x-1,5|$,

$h(x) = g(2x) = f(2x-3) =$

$= |2x-3|$,



2.Példa: Oldjuk meg a valós számok halmazán az egyenlőtlenséget

$$|2x-3|<4.$$

Megoldás: Grafikusan.

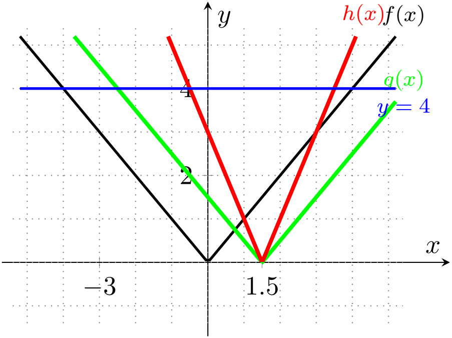
$f(x)=|x|,$

$g(x)=f(x-1,5)=|x-1,5|,$

$h(x)=g(2x)=f(2x-3)=$

$=|2x-3|,$

$y=4$



2.Példa: Oldjuk meg a valós számok halmazán az egyenlőtlenséget

$$|2x-3| < 4.$$

Megoldás: Grafikusan.

$f(x) = |x|\,,$

$g(x) = f(x-1,5) = |x-1,5|\,,$

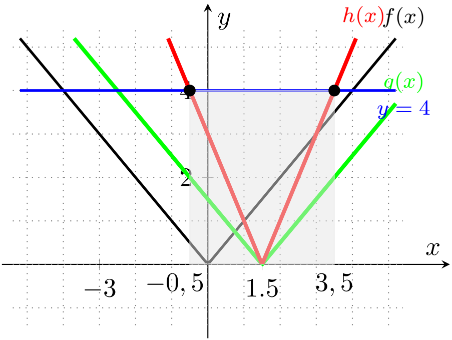
$h(x) = g(2x) = f(2x-3) =$

$= |2x-3|\,,$

$y = 4$

$h(x) < 4,$

ha $-0,5 < x < 3,5.$



2.Példa: Oldjuk meg a valós számok halmazán az egyenlőtlenséget

$$|2x-3| < 4.$$

Megoldás: Grafikusan.

$f(x) = |x|\,,$

$g(x) = f(x-1,5) = |x-1,5|\,,$

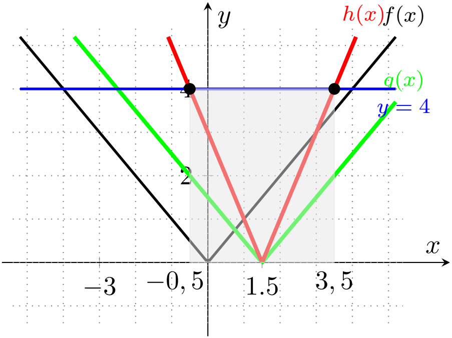
$h(x) = g(2x) = f(2x-3) =$

$= |2x-3|\,,$

$y = 4$

$h(x) < 4,$

ha $-0,5 < x < 3,5.$



Tehát az egyenlőtlenség megoldásai a $-0,5 < x < 3,5$ számok.

Függvénytulajdonságok - Paritás

Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény

- **páros**, ha $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$, és $f(-x) = f(x)$.
  A grafikon az y tengelyre tükrös.

- **páratlan**, ha $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$, és $f(-x) = -f(x)$.
  A grafikon az origóra tükrös.

Példák:

x^2, $|x|$: páros

x, x^3: páratlan

Páros függvények összege is páros, páratlan függvények összege is páratlan!

A paritás vizsgálatát csak akkor hajtjuk végre, ha az értelmezési tartomány az origóra szimmetrikusan helyezkedik el a számegyenesen.

Függvénytulajdonságok - Monotonitás

Az f függvény egy $I = (a, b) \subseteq D_f$ intervallumon

- **monoton nő**, ha $\forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
- **szigorúan monoton nő**, ha $\forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- **monoton csökken**, ha $\forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.
- **szigorúan mon. csökken**, ha $\forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
- **monoton**, ha $f(x)$ az I-n monoton nő vagy monoton csökken.
- **szigorúan monoton**, ha $f(x)$ az I-n szigorúan monoton nő vagy szigorúan monoton csökken.

Példák:

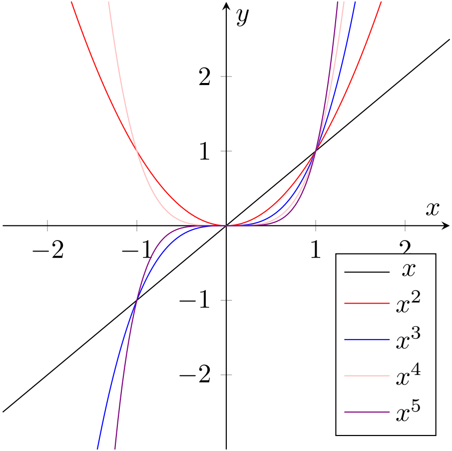
$f(x) = x$ szigorúan monoton nő $\mathbb{R}$-en.

$g(x) = x^2$ szigorúan monoton csökken $(-\infty, 0]$-n, és szigorúan monoton nő $[0, +\infty)$-n, de $\mathbb{R}$-en nem monoton.

Ha egy függvény egyszerre monoton nő és monoton csökken egy intervallumon, akkor az az intervallumon konstans függvény.

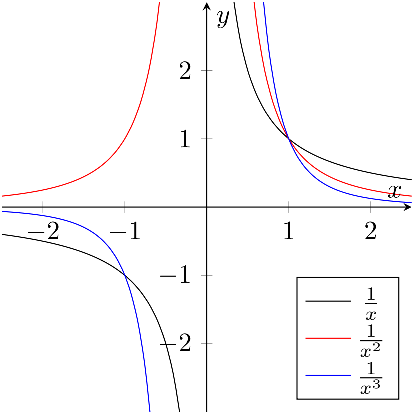
Nevezetes függvények - Hatványfüggvények

Az $f(x) = x^n$ függvény ($n \in \mathbb{Z}^+$) értelmezési tartománya $D_f = \mathbb{R}$ a teljes valós számok halmaza. Grafikonja páros n esetén parabolához hasonlít, páros függvény. Páratlan n esetén monoton növekvő a függvény, grafikonja $n \geq 3$ esetén az x^3 grafikonjához hasonlít, páratlan függvény.



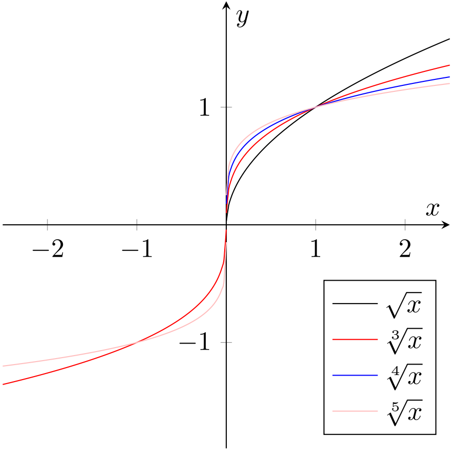
Nevezetes függvények - Hatványfüggvények negatív kitevővel

Az $f(x) = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ függvény ($n \in \mathbb{Z}^+$) értelmezési tartományából kizárjuk a nullát $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Grafikonja páratlan n esetén páratlan, hiperbolához hasonló ($n = 1$-re hiperbola), és teljes D_f-en monoton csökken a függvény. Páros n-re páros a függvény, ilyenkor $(-\infty, 0)$-on monoton növekvő, $(0, \infty)$-on monoton csökkenő.



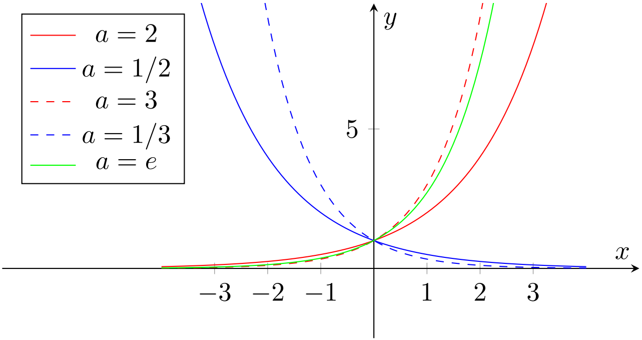
Nevezetes függvények - Gyökfüggvények (tört kitevők)

Az $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ függvény páros n esetén csak a nemnegatív értékekre van értelmezve $D_f = [0, \infty)$. Páratlan n esetén $D_f = \mathbb{R}$, páratlan függvény. Minden $n \in \mathbb{Z}^+$-re a gyökfüggvények a teljes értelmezési tartományukon monoton növekedőek.



Nevezetes függvények - Exponenciális függvény

Az $f(x) = a^x$ függvényt exponenciális függvénynek nevezzük, ahol $a > 0$ és $a \neq 1$. Értelmezési tartománya $\mathbb{R}$, még értékkészlete $(0, \infty)$. $a > 1$ esetén monoton növő, még $a < 1$ esetén nomoton csökkenő a függvény.



Az $a = e = 2,718281828459\ldots$ esetén gyakran nevezzük a függvényt „az" exponenciális függvénynek (jelölés: e^x).