Matematika A1 előadás

Budapesti Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Nemzetközi gazdálkodás és Pénzügy és számvitel alapszakok

2024. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

4. előadás:
Függvények kompozíciója és invertálása, nevezetes függvények és tulajdonságaik, trigonometrikus függvények és inverzeik

Függvénykompozíció

Ha $g : A \to B'$ és $f : B \to C$, ahol $B' \subseteq B$, akkor f és g ebben a sorrendben vett **kompozíciója**

$$f \circ g : A \to C$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

A f a **külső**, míg g a **belső függvény**.

Ha $f : D_f \to \mathbb{R}$ és $g : D_g \to \mathbb{R}$ ($D_f, D_g \subseteq \mathbb{R}$), akkor az $f \circ g$ összetett függvény értelmezési tartománya:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in D_g \text{ és } g(x) \in D_f\}.$$

Példa: $f(x) = \sqrt{x}$ és $g(x) = 2x + 1$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x+1) = \sqrt{2x+1} \qquad 2x + 1 \geq 0, \ (x \geq -1/2)$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x}\right) = 2\sqrt{x} + 1 \qquad x \geq 0$$

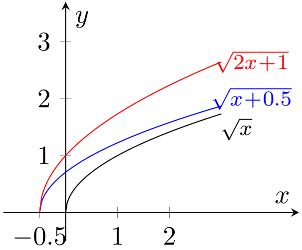
Függvénykompozíció - Példa

Az előző példa szemléletesen:

Az

$$f(g(x)) = \sqrt{2x+1} = \sqrt{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}$$

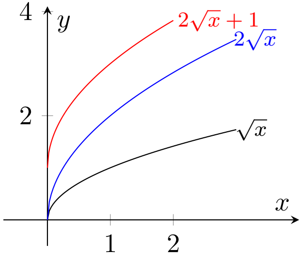
függvény grafikonját a $\sqrt{x}$ függvényt $\frac{1}{2}$-del balra tolva, majd $\sqrt{2}$-vel függőlegesen nyújtva kapjuk.



A

$$g(f(x)) = 2\sqrt{x}+1$$

függvény grafikonját a $\sqrt{x}$ függvényt 2-vel függőlegesen nyújtva, majd 1-gyel felfelé tolva kapjuk.



Függvények invertálása

Az $f^{-1} : R_f \to D_f$ függvény az $f : x \mapsto f(x), \quad D_f \to R_f$ injektív függvény **inverze**, ha bármely $y \in R_f$ elemhez azt az x-et rendeli hozzá, melyre $f(x) = y$.

Az f^{-1} inverz függvény értelmezési tartománya az f függvény értékkészlete.

A definícióból az következik, hogy $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$.

Ha f függvény grafikonját tengelyesen tükrözzük az $y = x$ egyenesre, akkor pontosan f^{-1} grafikonját kapjuk.

Egyszerűbb példák:

$f(x) = |x|$ nem injektív, így nincs inverze.

$f(x) = x$ inverze önmaga: $f^{-1}(x) = x$.

$f(x) = ax + b$ inverze $f^{-1}(x) = \dfrac{x-b}{a}$, ha $a \neq 0$ (köv. példa).

$f(x) = x^2$ nem injektív, de ha csak a $[0, +\infty)$ intervallumon értelmezzük, akkor injektív, és az inverze: $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Függvények invertálása

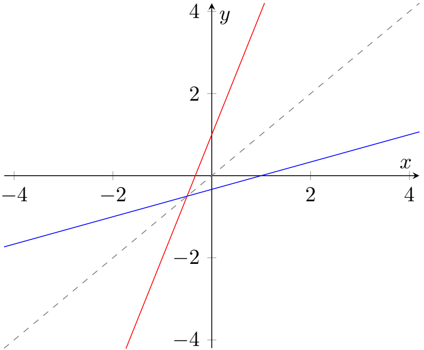
Példa. Az $f(x) = 3x + 1$ függvény inverze:

Függvények invertálása

Példa. Az $f(x) = 3x + 1$ függvény inverze:

$$\begin{aligned} f(x) &= y \\ 3x + 1 &= y \\ 3x &= y - 1 \\ x &= \frac{y-1}{3}, \end{aligned}$$

tehát $f^{-1}(y) = \dfrac{y-1}{3}$, azaz $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{3}$.



Függvények invertálása

Példa: A $g(x) = \sqrt{x-1}$, $x \geq 1$ függvény inverze

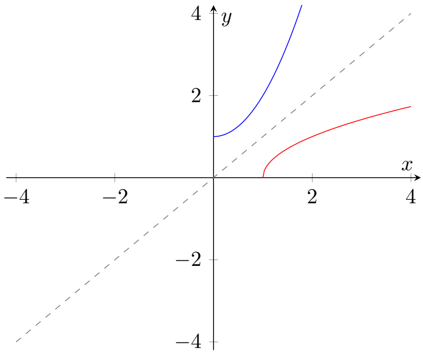
Példa: A $g(x) = \sqrt{x-1}$, $x \geq 1$ függvény inverze

$$g(x) = y$$
$$\sqrt{x-1} = y$$
$$y^2 = x - 1$$
$$y^2 + 1 = x,\ x \geq 1 \rightarrow y \geq 0$$

tehát $g^{-1}(y) = y^2+1,\ y \geq 0$, azaz

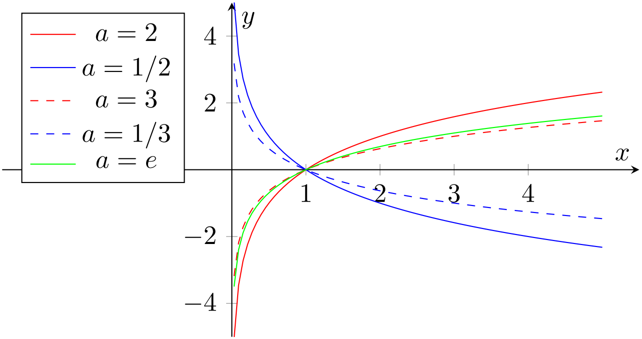
$$g^{-1}(x) = x^2 + 1,\ x \geq 0$$

.



Logaritmusfüggvény

Az $f(x) = \log_a(x)$ függvényt "a"-alapú logaritmusfüggvénynek nevezzük, ahol $a > 0$ és $a \neq 1$. A logaritmusfüggvény az exponenciális függvény inverze. Ezért értelmezési tartománya a $(0, \infty)$, értékkészlete $\mathbb{R}$. $a > 1$ esetén monoton növő, még $a < 1$ esetén nomoton csökkenő a függvény.



Az $a = e = 2,718281828459\ldots$ esetén természetes alapú logaritmusfüggvénynek nevezzük (jelölés: $\ln(x)$).

Exponenciális és logaritmikus azonosságok

$$a^0 = 1 \qquad \log_a(1) = 0$$

$$a^1 = a \qquad \log_a(a) = 1$$

$$a^{x+y} = a^x a^y \qquad \text{(ha } a^x = b \qquad \log_a(b\,c) = \log_a(b) + \log_a(c)$$

$$a^{xy} = \left(a^x\right)^y \qquad \text{és } a^y = c) \qquad \log_a(b^y) = y \cdot \log_a(b)$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x \qquad \log_a\left(\frac{1}{b}\right) = -\log_a(b)$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$$

$$a^x b^x = (ab)^x$$

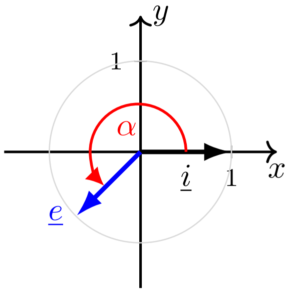
$$\log_a(b) = \frac{\log_z(b)}{\log_z(a)}$$

(Itt $a > 0$ és $a \neq 1$, és $z > 0$ és $z \neq 1$.)

Kitérő: Sinus és cosinus értelmezése általánosan (Forgó egységvektor)

Ha a derékszögű koordináta-rendszerben az $\underline{i}(1,0)$ vektort α szöggel az origó körül pozitív irányban (az óramutató járásával ellentétesen) elforgatom, akkor egy meghatározott $\underline{e}$ egységvektort kapok.

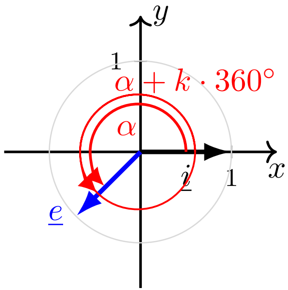
Egy ilyen egységvektorhoz azonban nem csak egy, hanem végtelen sok irányszög tartozik, hiszen $\alpha + k \cdot 360°$, $k \in \mathbb{Z}$ szöggel való forgatás ugyanazt az $\underline{e}$ vektort eredményezi.



Kitérő: Sinus és cosinus értelmezése általánosan (Forgó egységvektor)

Ha a derékszögű koordináta-rendszerben az $\underline{i}(1,0)$ vektort α szöggel az origó körül pozitív irányban (az óramutató járásával ellentétesen) elforgatom, akkor egy meghatározott $\underline{e}$ egységvektort kapok.

Egy ilyen egységvektorhoz azonban nem csak egy, hanem végtelen sok irányszög tartozik, hiszen $\alpha + k \cdot 360°$, $k \in \mathbb{Z}$ szöggel való forgatás ugyanazt az $\underline{e}$ vektort eredményezi.



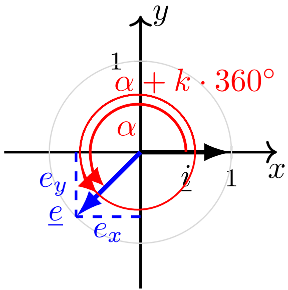
Ekkor általánosan az α (és $\alpha + k \cdot 360°$) szögű elforgatáshoz tartozó $\underline{e}(e_x, e_y)$ vektor koordinátáit nevezzük a szög koszinuszának illetve szinuszának:

$$\cos(\alpha) := e_x, \qquad \sin(\alpha) := e_y.$$

Kitérő: Sinus és cosinus értelmezése általánosan (Forgó egységvektor)

Ha a derékszögű koordináta-rendszerben az $\underline{i}(1,0)$ vektort α szöggel az origó körül pozitív irányban (az óramutató járásával ellentétesen) elforgatom, akkor egy meghatározott $\underline{e}$ egységvektort kapok.

Egy ilyen egységvektorhoz azonban nem csak egy, hanem végtelen sok irányszög tartozik, hiszen $\alpha + k \cdot 360°$, $k \in \mathbb{Z}$ szöggel való forgatás ugyanazt az $\underline{e}$ vektort eredményezi.



Ekkor általánosan az α (és $\alpha + k \cdot 360°$) szögű elforgatáshoz tartozó $\underline{e}(e_x, e_y)$ vektor koordinátáit nevezzük a szög koszinuszának illetve szinuszának:

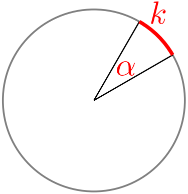
$$\cos(\alpha) := e_x, \qquad \sin(\alpha) := e_y.$$

Az α (és $\alpha + k \cdot 360°$) szög tangense illetve kotangense pedig ebből:

$$\mathrm{tg}(\alpha) := \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \ (\cos(\alpha) \neq 0), \qquad \mathrm{ctg}(\alpha) := \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \ (\sin(\alpha) \neq 0).$$

Kitérő: Szögek mérése radiánban

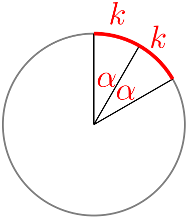
A kör egy ívdarabjának hossza arányos a hozzá tartozó középponti szöggel.



Ez azt jelenti, hogy ha α középponti szöghöz k hosszúságú ív tartozik, akkor

Kitérő: Szögek mérése radiánban

A kör egy ívdarabjának hossza arányos a hozzá tartozó középponti szöggel.

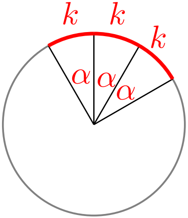


Ez azt jelenti, hogy ha α középponti szöghöz k hosszúságú ív tartozik, akkor 2α-hoz $2k$,

Kitérő: Szögek mérése radiánban

A kör egy ívdarabjának hossza arányos a hozzá tartozó középponti szöggel.

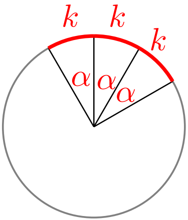
Ez azt jelenti, hogy ha α középponti szöghöz k hosszúságú ív tartozik, akkor 2α-hoz $2k$, 3α-hoz $3k$ stb. ívhosszt mérhetünk.



Kitérő: Szögek mérése radiánban

A kör egy ívdarabjának hossza arányos a hozzá tartozó középponti szöggel.

Ez azt jelenti, hogy ha α középponti szöghöz k hosszúságú ív tartozik, akkor 2α-hoz $2k$, 3α-hoz $3k$ stb. ívhosszt mérhetünk.

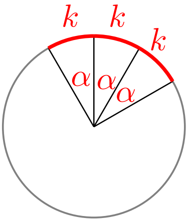


Az egységkörön α szöghöz tartozó körív hossza a szög ívmértéke lesz. Mivel az egységkör teljes kerülete $2 \cdot 1 \cdot \pi$, ezért

Kitérő: Szögek mérése radiánban

A kör egy ívdarabjának hossza arányos a hozzá tartozó középponti szöggel.

Ez azt jelenti, hogy ha α középponti szöghöz k hosszúságú ív tartozik, akkor 2α-hoz $2k$, 3α-hoz $3k$ stb. ívhosszt mérhetünk.



Az egységkörön α szöghöz tartozó körív hossza a szög ívmértéke lesz. Mivel az egységkör teljes kerülete $2 \cdot 1 \cdot \pi$, ezért

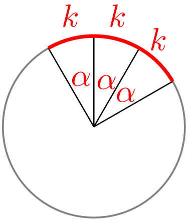
- $360°$ ívmértéke 2π,
- $180°$ ívmértéke π,
- $90°$ ívmértéke $\frac{\pi}{2}$ stb. lesz.

Így $1°$-hoz $\frac{\pi}{180} \approx 0,0175$ ívmérték tartozik.

Kitérő: Szögek mérése radiánban

A kör egy ívdarabjának hossza arányos a hozzá tartozó középponti szöggel.

Ez azt jelenti, hogy ha α középponti szöghöz k hosszúságú ív tartozik, akkor 2α-hoz $2k$, 3α-hoz $3k$ stb. ívhosszt mérhetünk.



Az egységkörön α szöghöz tartozó körív hossza a szög ívmértéke lesz. Mivel az egységkör teljes kerülete $2 \cdot 1 \cdot \pi$, ezért

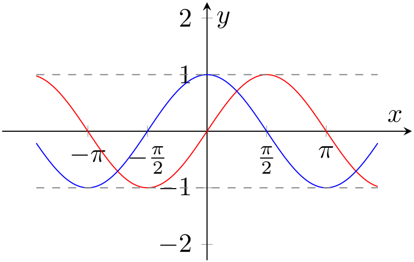
- $360°$ ívmértéke 2π,
- $180°$ ívmértéke π,
- $90°$ ívmértéke $\frac{\pi}{2}$ stb. lesz.

Így $1°$-hoz $\frac{\pi}{180} \approx 0,0175$ ívmérték tartozik.

Az ívmérték egysége az 1 radián (annak a szögnek az ívmértéke, mely az egységkör 1 hosszú ívéhez tartozik).

Trigonometrikus függvények

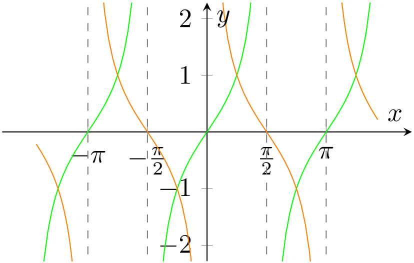
A $\sin(x)$, $\cos(x)$ függvényeket úgy értelmezzük, hogy $x \in \mathbb{R}$ radiánban mért szögértékhez a függvény a szög szinuszát/koszinuszát rendeli.
Ezek a függvények minden valós számon értelmezve vannak, és ± 1 között vesznek fel értékeket.



A $\mathbf{tg}(x)$, $\mathbf{ctg}(x)$ függvények definíció szerint x radiánhoz tartozó megfelelő hányadosok értékei.

$D_{tg} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, és minden függvényág monoton nő.

$D_{ctg} = (0, \pi) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, és minden függvényág monoton csökken.



Függvénytulajdonságok - Korlátosság

Az $f : I = [a, b] \subseteq D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény

- **alulról korlátos**, ha van olyan $k \in \mathbb{R}$, hogy $f(x) \geq k$ minden $x \in I$ esetén (k **alsó korlát**). $\rightsquigarrow$ **legnagyobb alsó korlát**
- **felülről korlátos**, ha van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy $f(x) \leq K$ minden $x \in I$ esetén (K **felső korlát**). $\rightsquigarrow$ **legkisebb felső korlát**
- **korlátos**, ha alulról és felülről korlátos, azaz van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy $|f(x)| \leq K$ minden $x \in I$ esetén.

Példák:

$f(x) = |x|$ alulról korlátos D_f-en, legnagyobb alsó korlát a 0, de felülről nem korlátos, így nem is korlátos.

$g(x) = \sin(x)$ alulról korlátos, legnagyobb alsó korlát -1, felülről korlátos, legkisebb felső korlát a 1, így korlátos is.

Függvénytulajdonságok - Periodikus függvények

Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény **periodikus (p szerint)**, ha létezik $p \neq 0$ úgy, hogy $x \in D_f$ esetén $x \pm p \in D_f$ és $f(x+p) = f(x)$.

Ha egy függvény p szerint periodikus, akkor $k \cdot p$ szerint is periodikus, ahol $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

A legkisebb pozitív számot, mely szerint f periodikus, f **periódusának** nevezzük (ha van).

Példák:

$\sin(x), \cos(x)$: 2π szerint periodikus.

$\mathrm{tg}(x)$: π szerint periodikus.

$\{x\}$: (törtrész) $= x - [x]$ (egészrész) függvény: 1 szerint periodikus

Egy példa, amikor nincs periódushossz, de a függvény periodikus: a Dirichlet-függvény

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \\ 1, & \text{ha } x \text{ racionális.} \end{cases}$$

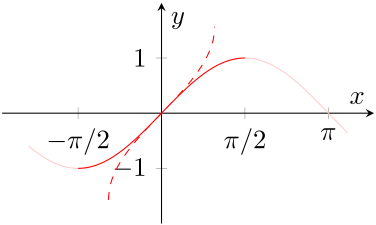
Sinus és Cosinus inverze

$\sin(x)$ nem injektív, de

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$

tartományon már igen, itt vehetjük az inverzét:

$$\arcsin(x) : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

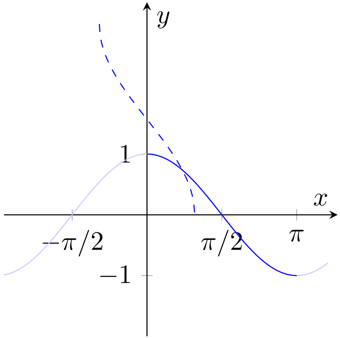


Hasolnlóan a $\cos(x)$,

$$[0, \pi] \to [-1, 1]$$

tartományon már bijektív, itt vehetjük az inverzét:

$$\arccos(x) : [-1, 1] \to [0, \pi]$$



Tangens, cotangens függvények inverze

A $\mathbf{tg}(x)$ függvényt a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$-re kell megszorítani, hogy injektív legyen.
Itt az inverze: $\mathbf{arctg}(x) : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Korlátos, $R_{arctg} = [-\pi/2, \pi/2]$.

A $\mathbf{ctg}(x)$ függvényt a $(0, \pi)$-re kell megszorítani, hogy injektív legyen.
Itt az inverze: $\mathbf{arcctg}(x) : \mathbb{R} \to (0, \pi)$. Korlátos, $R_{arcctg} = [0, \pi]$.